



Fiabilidad y mantenimiento

1. INTRODUCCION

Se define el mantenimiento como: *todas las acciones que tienen como objetivo preservar un artículo o restaurarlo a un estado en el cual pueda llevar a cabo alguna función requerida. Estas acciones incluyen la combinación de las acciones técnicas y administrativas correspondientes.*

A lo largo de su ciclo de vida cada sistema pasa por diferentes fases. La última de ellas es la de construcción y puesta en marcha, hasta que se alcanza el régimen normal de funcionamiento. Durante esta última fase, llamada de operación, que es la única auténticamente productiva, el sistema se ve sometido a fallos que entorpecen o, incluso, interrumpen temporal o definitivamente su funcionamiento.

El objeto del mantenimiento es, precisamente, reducir la incidencia negativa de dichos fallos, ya sea disminuyendo su número o atenuando sus consecuencias. Decimos que algo falla cuando deja de brindarnos el servicio que debía darnos o cuando aparecen efectos indeseables, según las especificaciones de diseño con las que fue construido o instalado el bien en cuestión.

La gran mayoría de los dispositivos físicos o tangibles sufren un proceso de degradación causado por el paso del tiempo y/o por su utilización. Ello significa que, a menos que se tomen medidas de mantenimiento eficaces, cualquier dispositivo (componente o sistema) acabará fallando, i.e.: eventualmente, el dispositivo dejará de ser operativo (dejará de realizar correctamente la función que le había sido asignada). Por tanto, se exige que los productos sean fiables. Deben desempeñar sus funciones de forma segura sin excesivo impacto en el medioambiente y ser fáciles de mantener durante su vida útil y así lograr la satisfacción del cliente.

La confiabilidad de un producto es un término colectivo que se usa para describir la disponibilidad de un producto y sus factores de influencia, esto es, fiabilidad, mantenibilidad y logística de mantenimiento.

Uno de los factores de mayor incidencia es la fiabilidad de un dispositivo (componente o sistema), definiéndose como la probabilidad de que éste funcione correctamente ("sobreviva" sin fallo) durante un determinado período de tiempo, sometido a unas condiciones de trabajo concretas. Así pues, la fiabilidad constituye un aspecto

fundamental de la calidad de todo dispositivo. Por tal motivo, resulta especialmente interesante la cuantificación de dicha fiabilidad, de forma que sea posible hacer estimaciones sobre la vida útil del producto.

Ciertas técnicas en especial las no paramétricas, fueron inicialmente desarrolladas para su uso en estudios médicos y biológicos (es decir, considerando entidades orgánicas en lugar de dispositivos) bajo el nombre genérico de análisis de supervivencia (comparación de diferentes tratamientos médicos, determinación de los factores que intervienen en la supervivencia de los peces de un río, etc.).

En la actualidad, sin embargo, la aplicación de dichas técnicas, en especial las paramétricas, se ha extendido a otras áreas como la económica o la industrial bajo el nombre de análisis de tiempos de fallo (establecimiento de períodos de garantía de un producto, diseño de planes de mantenimiento preventivo, etc.).

1.1 Evolucion del mantenimiento

Desde hace mucho tiempo el hombre ha utilizado la idea del mantenimiento, tanto para ahorrar costos como para maximizar la vida útil de las herramientas y maquinarias. Actualmente el hombre ha transitado por grandes cambios y avances en el ramo del mantenimiento, a continuación se presenta una cronología de cómo ha ido evolucionando:

120000 a. C Inicio del pensamiento y habilidades del hombre

Solo realizaban trabajos de **Mantenimiento Correctivo (MC)** en sus herramientas y utensilios.

1780-1830

Durante la Primera Revolución Industrial los bienes se fabricaban en forma manual, por lo que eran necesarios hombres diestros y hábiles. Como resultado, los productos fueron pocos, caros y de calidad variable.

Fábrica de papel 1780

El personal de producción, además de realizar sus labores, cuidaba también las maquinas solo con acciones de MC, ya que no las consideraban tan importantes para el desarrollo de su trabajo.

1798

Surgió la necesidad de mejorar el MC, pues los trabajos eran muy tardados y frecuentemente exigían la atención de varios especialistas, ya aquellas piezas rotas tenían que volverse a hacer a la medida.

Eli Whitney 1765-1825

En 1798 el inventor norteamericano Eli Whitney desarrollo la idea de utilizar partes intercambiables en las armas de guerra, pues él ya lo hacía en sus máquinas algodóneras cinco años antes.

1879

Debido a la proliferación de fábricas, en muchas se contrató personal sin preparación, lo cual implicó fuertemente su adiestramiento y la administración de las mismas fabricas; además, ambos problemas presionaban mucho para ser resueltos.

Frederick W. Taylor 1856-1915

El trabajo de Taylor dio base a la Segunda Revolución Industrial al aumentar el interés por el cientificismo en el trabajo y en la administración, lo cual incremento de manera rápida la productividad; pero el Mto. A las maquinas seguía siendo correctivo.

1903

Los bienes que necesariamente tenían que ser de buena calidad eran muy caros y, por tanto, tenían poca demanda; solo los ricos podían aspirar a comprar, por ejemplo, un automóvil. La división del trabajo era difícil de mejorar, pues se trabajaba con grupos de especialistas.

Henry Ford 1879-1947

Estableció la producción industrial masiva de automóviles, su objetivo fue abaratar su producto a tal grado que pudiera ser comprado hasta por la gente del pueblo; lo cual obtuvo con la creación de un nuevo proceso de manufactura por medio de cintas transportadoras, que fue montado en 1914.

1910

Se incrementó la cantidad de máquinas, y por razón natural, el trabajador dedicado a la producción invirtió cada vez más de su tiempo para hacer trabajos de arreglo a las mismas (MC).

Albert Ramondy Asociados

Se formaron cuadrillas de MC con personal de baja calidad para liberar de este trabajo al personal de producción, el cual debía conocer y tener habilidad para producir lo que hacia la máquina.

1914-1918

La industria de guerra tuvo la necesidad de trabajar en forma continua, debido a la demanda urgente de sus productos, pero la cantidad de máquinas con fallas era cada día mayor.

Primera Guerra Mundial

Al personal de MC se le comenzaron a asignar labores de prevención para evitar que las maquinas más importantes fallaran. Nacieron los Departamentos de **Mantenimiento Preventivo (PM)**.

1916

Existían muchas maneras de aplicar la Administración Científica, cuando Fayol desarrollo su modelo de Administración Industrial y General. Dicho modelo fue integrado con cinco elementos: previsión, organización, dirección, coordinación y control.

Henry Fayol 1841-1925

Se desarrolló el actual Proceso Administrativo, con cinco elementos: planeación, organización, integración, ejecución y control, dando un concepto holístico a los departamentos de cada empresa, lo cual hizo notoria la rivalidad existente entre el personal de Producción y el de Mantenimiento.

1927-1931

Debido al cientificismo y a los trabajos de Taylor en la aplicación de tiempos y movimientos, creció el interés por el uso de la estadística en el trabajo, pero su aplicación era muy lenta y poco confiable. Los triunfos comprobados por el uso de la estadística en el trabajo industrial norteamericano hicieron que dicha rama de la matemática fuera aceptada como de empleo regular a nivel mundial.

Walter A. Shewhart 1891-1967

Shewhart desarrollo el **Control Estadístico de Calidad (SQC)** y Deming se le unió con su libro El Control Económico de la Calidad del Producto Manufacturado). Deming continuó trabajando con Shewhart, mejorando con el SQC la industria norteamericana, hasta 1939 que con la llegada de la Segunda Guerra Mundial se abandonó esta práctica.

1937

El creciente número de trabajos que era necesario desarrollar en los activos físicos de una empresa obligo a analizar la importancia de cada uno y tomar acciones para priorizarlos.

Joseph Juran 1904

Joseph Juran dio a conocer su regla del 80/20 a la cual llamo Principio de Pareto, y este permite establecer prioridades al determinar los ítems de influencia vital o importante a fin de atenderlos por orden de importancia con respecto al producto.

1939-1945

La Segunda Guerra Mundial obligo a los países beligerantes, sobre todo a EUA, a trabajar con sus industrias de acero las 24 horas y a tomar a los obreros como administradores de primer nivel a fin de mejorar la comunicación y la toma de decisiones en la línea de trabajo.

Segunda Guerra Mundial

Se sistematizan los trabajos de MP, y en EUA se empezó a abandonar el Control Estadístico de Calidad, que habían establecido especialistas como Walter A. Shewhart y W. Edwards Deming, antes de la Segunda Guerra Mundial.

1946

El MP continuo sin proporcionar buenos resultados, pues no aseguraba que las maquinas entregaran el producto con la calidad y cantidad deseada, aunque se aumentaron fuertemente los costos.

American Society For Quality

Se creó la Sociedad Americana de Control de Calidad de la cual fue socio el Dr. W. Edwards Deming. Dicha sociedad ayudo al estudio estadístico del trabajo y mejoró, de manera posible, la calidad de los productos obtenidos.

1950

Durante la Segunda Guerra Mundial Japón quedó destrozado en su industria y en su campo, y el Comando Supremo de las Fuerzas Aliadas SCAP, al mando del general estadounidense Douglas MacArthur, estableció un programa de desarrollo con especialistas, entre ellos el principal fue W. Edwards Deming.

W. E. Deming 1900-1993

Los trabajos de Deming dieron inicio a la Tercera Revolución Industrial, al establecer en la industria japonesa **el Control Estadístico de Calidad**. Aplicó el criterio de que la empresa empieza en el proveedor y termina en el cliente, al que se le considera como la parte más importante. Aplicó el Ciclo Shewhart' PDCA o PHVA, que significa: planificar-hacer-verificar-actuar.

1950

Debido al fuerte crecimiento de la productividad, la exigencia de los mercados por la mejora aumentó la calidad del producto.

Industriales de Estados Unidos de América

Se creó el concepto de **Mantenimiento Productivo**. Esto enfocó el trabajo de Mto. A obtener tanto calidad como cantidad de producto, y no solo a dedicarse al cuidado de las máquinas.

1951

Aunque el uso de la estadística en el trabajo era cada vez más frecuente, existían más problemas planteados por la seguridad del usuario, cuyo análisis exigía la intervención de especialistas y mucho tiempo.

Wallodi Weibull(1887-1979)

Presento por escrito La **Distribución Weibull** de la que se deriva el Análisis de Weibull, técnica utilizada para estimar una probabilidad y basada en datos medidos o supuestos. Dicha distribución fue aplicada para solucionar problemas de seguridad y Mantenimiento, lo cual ha hecho posible la seguridad en naves aéreas.

1960

En todo el mundo, a pesar del sobre mto. Y los altos costos, las naves aéreas sufrían, por cada millón de despegues, más de 60 accidentes catastróficos al año. Se comprobó que las intervenciones periódicas y el cambio de piezas usadas por nuevas, no aseguraban la calidad del servicio ofrecido, por lo que existían otros defectos que producían las fallas.

ATA Air Transport Association

Se especificaron las labores de Mto. Necesarias para conservar el vuelo de una nave aérea. Se dio el concepto de **Mantenimiento Centrado en la Confiabilidad**. Comienza la aplicación del Sistema Equipo/Satisfactorios, el cual debe cuidar su equilibrio con respecto a las expectativas del usuario.

1960

En Japón la necesidad de mejorar la calidad de sus productos los llevo a visitar, a principio de 1960, la industria de EUA, en la que ya se trabajaba con la filosofía del **Mantenimiento Productivo**, y en su administración intervenían obreros y supervisores.

Kaoru Ishikawa1915

Autor del Diagrama Ishikawa. Su experiencia en el estudio del PM estadounidense desarrollo los Círculos de Calidad (QC) y preparo cursos y materiales obteniendo magníficos resultados en la calidad y productividad. En la actualidad, estos círculos ya son muy conocidos en el ámbito mundial.

1961

Los desastres catastróficos con pérdidas de vidas humanas representaban una alta tasa de errores humanos involuntarios, generalmente más en la operación de las maquinas que en el diseño. El operador no se daba cuenta de que la maquina presentaba defectos anunciándole la aproximación de la falla.

Shigeo Shingo1909-1990

A partir de 1961 Shingo comenzó a desarrollar el sistema Poka-Yoke, que literalmente significa "**a prueba de errores**"; este sistema es indispensable cuando lo que está en juego es la seguridad de la vida humana, además de cuidar la calidad del producto o servicio proporcionado por las máquinas.

1965

Cada decisión tomada para solucionar los problemas del trabajo presentaba una forma de pensar desordenada y hasta absurda, por lo que la comunicación entre las personas tenía graves deficiencias.

Kepner Tregoe

Presentación del libro El Directivo Racional, del cual se derivó el actual **Análisis-Causa-Raíz** (RCA), que facilita la investigación de las causas que producen un efecto para obtener un buen diagnóstico.

1968

Durante más de 20 años la Aviación Civil Estadounidense investigo afondo los problemas de mto., empleando toda clase de herramientas.

StanleyNowlan yHoward Heap(Air Trasnpport Association)

Publicaron su libro El Mantenimiento Centrado en la Confiabilidad, del cual se derive el documento Evaluación del Mto. Y Desarrollo del Programa revisado en 1988 y 1993.

1970

Se comenzó a difundir el uso de las computadoras en oficinas y fabricas en forma indiscriminada y sin integración a la administración total de las respectivas instalaciones. En esta época las computadoras se empleaban en los Departamentos de Producción y Mtto. Solo para el inventario de los activos fijos y no para su administración.

Ordenadores 1970

Se crea el software Computarizado para la Administración del Mantenimiento (CMMS) enfocado en resolver la problemática administrativa del área de Mtto. El software ha evolucionado los sistemas de Administración de Activos de la Empresa (EAM) y Planeación de las Necesidades de la Empresa (ERB).

1971

Existían dos problemas perennes: la lucha intestina entre los Departamentos de Producción y Mtto. Y la pérdida de oportunidad por no aprovechar al personal de Producción para hacer con los activos, trabajos de Mtto. Autónomo.

Seiichi Nakajima 1928

Creo el Mtto. Productivo Total (TPM basado en el Mtto. Productivo (PM) estadounidense, integrando a todo el personal de la empresa para ejecutar todo tipo de Mtto. Se apoya en los Círculos de Calidad.

1978

Los fabricantes de naves aéreas tenían que conquistar y mantener en el ámbito mundial sus mercados basados en la seguridad y calidad ofrecidas.

Air Transport Association

Produjo la Guía MSG-3 dedicada a los fabricantes de naves aéreas para que hicieran sus programas de Mantenimiento.

1980

En las plantas generadoras de electricidad que funcionan con energía nuclear se detectó la existencia de sobre Mantenimiento. Y se deseó abatir costos, más que mejorar la calidad del producto. Se empezó a aplicar el Mantenimiento Centrado en la Confiabilidad (RCM).

Instituto para la Investigación de la Energía Eléctrica

El Mantenimiento Centrado en la Confiabilidad fue modificado en forma tan profunda que ha dado lugar a la Optimización del Mantenimiento Planificado (PMO). De esta optimización obtenemos: Enfoque hacia la Confiabilidad=RCM Enfoque hacia los Costos=PMO

1980

Los avances obtenidos en plantas aeronáuticas, eléctricas y de energía nuclear dieron la oportunidad de estudiar y probar su aplicación en el resto de las industrias.

John M. Moubray 1949-2004

John M. Moubray y Asociados aplicaron el RCM en toda clase de industrias, empezando en Sudáfrica e Inglaterra. Mejoraron el RCM sin perder su enfoque en la Confiabilidad y ofreciendo su versión RCM 2.

1995

Los lugares de trabajo generalmente eran sucios y desordenados, lo que ocasionaba que los tiempos perdidos por accidentes de trabajo y búsqueda de herramientas y refacciones fueran muy elevados, de lo cual no existía conciencia.

Hiroiyuki Hirano 1946

Presento su libro 5 Pillars of Visual Workplace (5S's) comúnmente llamado Las cinco eses. La aplicación de esta filosofía mejoro de manera notable el ambiente de trabajo, la limpieza de la fábrica, la definición y organización de herramientas y, sobre todo, la calidad y productividad.

2005 Hasta la fecha existe un gran problema con la palabra Mtto., pues se usa para tratar de explicar dos sistemas de trabajo diferentes. El primero es el cuidado del equipo y el segundo es el cuidado del producto o servicio que proporciona la máquina. Esto se presenta como una dicotomía, aunque sus efectos se interrelacionan y han traído como consecuencia una gran confusión, ya que no existe una taxonomía al respecto que os permita hablar el mismo idioma.

Oportunidad de Desarrollo

Desde hace más de 30 años flota en el ambiente mundial la existencia de una nueva filosofía, con características ecológicas: llamada Filosofía de la Conservación, la cual se basa en el principio ecológico: el equipo se preserva y el satisfactorio se mantiene, esto ha dado lugar a la presencia de entidades y personas interesadas en estudiar el desarrollo de la Conservación Industrial (IC).

El mantenimiento de equipos, infraestructuras, herramientas, maquinaria, etc. representa una inversión que a mediano y largo plazo acarreará ganancias no sólo para el empresario quien a quien esta inversión se le revertirá en mejoras en su producción, sino también el ahorro que representa tener un trabajadores sanos e índices de accidentalidad bajos. El mantenimiento representa un arma importante en seguridad laboral, ya que un gran porcentaje de accidentes son causados por desperfectos en los equipos que pueden ser prevenidos. También el mantener las áreas y ambientes de trabajo con adecuado orden, limpieza, iluminación, etc. es parte del mantenimiento preventivo de los sitios de trabajo. El mantenimiento no solo debe ser realizado por el departamento encargado de esto. El trabajador debe ser concientizado a mantener en buenas condiciones los equipos, herramienta, maquinarias, esto permitirá mayor responsabilidad del trabajador y prevención de accidentes.

1.2 Evolución del concepto fiabilidad

En la actualidad, la fiabilidad, la mantenibilidad y la disponibilidad son características esenciales de funcionamiento de los sistemas. Estas características, junto con el

funcionamiento del soporte de mantenimiento se conocen colectivamente como confiabilidad.

Pero en sus inicios, el enfoque inicial fue realizado sobre la fiabilidad, atribuyendo su origen de estudio a la evaluación de la mortalidad derivada de las epidemias y a los métodos actuariales desarrollados por las compañías de seguros, para determinar el riesgo de sus pólizas. La herramienta utilizada para el cálculo de esta fiabilidad eran las tablas de vida.

A principios de 1900 se utilizaban los métodos actuariales para estudiar la supervivencia de pacientes con determinados tratamientos y para estudiar la fiabilidad de los ferrocarriles. La teoría matemática de la fiabilidad se desarrolla por las demandas de la tecnología. El área de mantenimiento de máquinas es donde la fiabilidad se aplica con sofisticadas técnicas matemáticas.

En 1939 Walodie Weibull, propuso una distribución para describir la duración de los materiales, que más tarde se denominaría distribución de Weibull. Esta distribución es utilizada en infinidad de aplicaciones debido a su gran versatilidad.

En 1953 Epstein y Sobel comenzaron a trabajar con la distribución Exponencial como modelo para estudiar la vida útil de un dispositivo en función del tiempo. La distribución exponencial no tiene memoria, es decir, el tiempo de vida útil de un determinado dispositivo no influye en la probabilidad de que este falle. La popularidad de esta distribución es el gran uso que se ha hecho de ella en trabajos de fiabilidad debido a su simplicidad en los cálculos.

En los años noventa, la investigación de la fiabilidad toma nuevas direcciones gracias a M. B. Mendel. Sus métodos se pueden encontrar en publicaciones sobre problemas de fiabilidad en la ingeniería, entre los que destacan los de Shortle y Mendel (1996).

Una definición probabilística de la fiabilidad la presenta Meeker y Escobar (1998), que la define como la probabilidad de que una unidad realice su función hasta un tiempo especificado bajo las condiciones de uso encontradas.

Otra perspectiva, orientada hacia el cliente o usuario del producto final, es la proporcionada por Condra (2001), que afirma que “un producto fiable es aquel que hace lo que el usuario quiere que haga cuando el usuario quiere que lo haga”. De acuerdo con esta definición, la fiabilidad sería calidad a través del tiempo.

Dependiendo del enfoque dado a la fiabilidad, puede también encontrarse su vinculación con el concepto de “misión”, esta idea aparece vinculada a los inicios de estos estudios, en el contexto de equipos diseñados para su uso militar, aunque hoy en día sigue siendo utilizada también en diferentes campos. En este caso, se transforma el concepto de fiabilidad a confiabilidad, a que el equipo funcione correctamente durante el tiempo de misión

1.3 Evolución del concepto de mantenimiento

Históricamente, el mantenimiento ha evolucionado a través de tres generaciones. A medida que progresa este curso, veremos como el RCM es la piedra angular de la Tercera Generación. Sin embargo, la Tercera Generación puede verse solamente en la perspectiva de la Primera y Segunda Generación.

Podemos encontrar infinidad de definiciones diferentes para el concepto de mantenimiento según los criterios de cada autor. Intentando homogeneizar diferentes criterios, podemos definir el mantenimiento como

El conjunto de actividades que se realizan sobre un componente, equipo o sistema para asegurar que continúe desempeñando las funciones que se esperan de él, dentro de su contexto operacional.

El objetivo fundamental del mantenimiento, por tanto, es preservar la función y la operabilidad, optimizar el rendimiento y aumentar la vida útil de los activos, procurando una inversión óptima de los recursos.

Este enfoque del mantenimiento es resultado de una evolución importante a través del tiempo. John Moubray (1997) en su libro RCM II distingue entre tres generaciones diferentes de mantenimiento. Cada una de las cuales representa las mejores prácticas utilizadas en una época determinada

1.3.1 La Primera Generación

La Primera Generación cubre el periodo hasta la II Guerra Mundial. En esos días la industria no estaba muy mecanizada, por lo que los periodos de paradas no importaban mucho. La maquinaria era sencilla y en la mayoría de los casos diseñada para un propósito determinado. Esto hacía que fuera fiable y fácil de reparar. Como resultado, no se necesitaban sistemas de mantenimiento. Complicados, y la necesidad de personal calificado era menor que ahora.

El único mantenimiento que se realizaba era el de "Reparar cuando se averíe", es decir, mantenimiento correctivo.



1.3.2 La Segunda Generación

Durante la Segunda Guerra Mundial las cosas cambiaron drásticamente. Los tiempos de la Guerra aumentaron la necesidad de productos de toda clase mientras que la mano de obra industrial bajó de forma considerable. Esto llevó a la necesidad de un aumento de mecanización. Hacia el año 1950 se habían construido máquinas de todo tipo y cada vez más complejas. La industria había comenzado a depender de ellas.

Al aumentar esta dependencia, el tiempo improductivo de una máquina se hizo más patente. Esto llevó a la idea de que los fallos de la maquinaria se podían y debían de prevenir, lo que dio como resultado el nacimiento del concepto del mantenimiento preventivo. En el año 1960 esto se basaba primordialmente en la revisión completa del material a intervalos fijos.



El costo del mantenimiento comenzó también a elevarse mucho en relación con los otros costes de funcionamiento. Como resultado se comenzaron a implantar sistemas de control y planificación del mantenimiento. Estos han ayudado a poner el mantenimiento bajo control, y se han establecido ahora como parte de la práctica del mismo.

1.3.3 La Tercera Generación.

Desde mediados de los años setenta, el proceso de cambio en la industria ha cobrado incluso velocidades más altas. Los cambios pueden clasificarse bajo los títulos de nuevas expectativas, nueva investigación y nuevas técnicas.

Nuevas Expectativas: El crecimiento continuo de la mecanización significa que los periodos improductivos tienen un efecto más importante en la producción, costo total y servicio al cliente. Esto se hace más patente con el movimiento mundial hacia los sistemas de producción "justo a tiempo", en el que los reducidos niveles de stock en curso hacen que pequeñas averías puedan causar el paro de toda una planta. Esta consideración está creando fuertes demandas en la función del mantenimiento.

Una automatización más extensa significa que hay una relación más estrecha entre la condición de la maquinaria y la calidad del producto. Al mismo tiempo, se están elevando continuamente los estándares de calidad. Esto crea mayores demandas en la función del mantenimiento.

Otra característica en el aumento de la mecanización es que cada vez son más serias las consecuencias de los fallos de una planta para la seguridad y/o el medio ambiente. Al mismo tiempo los estándares en estos dos campos también están mejorando en respuesta a un mayor interés del personal gerente, los sindicatos, los medios de información y el gobierno. También esto ejerce influencia sobre el mantenimiento.

Finalmente, el coste del mantenimiento todavía está en aumento, en términos absolutos y en proporción a los gastos totales. En algunas industrias, es ahora el segundo gasto operativo de coste más alto y en algunos casos incluso el primero. Como resultado de esto, en solo treinta años lo que antes no suponía casi ningún gasto se ha convertido en la prioridad de control de coste más importante.

Nueva Investigación: Mucho más allá de las mejores expectativas, la nueva investigación está cambiando nuestras creencias más básicas acerca del mantenimiento. En particular, se hace aparente ahora que hay una menor conexión entre el tiempo que lleva una máquina funcionando y sus posibilidades de falla.

1.3.4 Nuevas tendencias del mantenimiento. La cuarta Generación.

En los últimos años hemos vivido un crecimiento muy importante de nuevos conceptos de mantenimiento y metodologías aplicadas a la gestión del mantenimiento.

Hasta finales de la década de los 90, los desarrollos alcanzados en la 3ª generación del mantenimiento incluían:

- Herramientas de ayuda a la decisión, como estudios de riesgo, modos de fallo y análisis de causas de fallo.
- Nuevas técnicas de mantenimiento, como el monitoreo de condición
- Equipos de diseño, dando mucha relevancia a la fiabilidad y mantenibilidad.
- Un cambio importante en pensamiento de la organización hacia la participación, el trabajo en equipo y la flexibilidad.

A estos usos, se han ido añadiendo nuevas tendencias, técnicas y filosofías de mantenimiento hasta nuestros días, de tal forma que actualmente podemos hablar de una cuarta generación del mantenimiento.

El nuevo enfoque se centra en la eliminación de fallos utilizando técnicas proactivas. Ya no basta con eliminar las consecuencias del fallo, sino que se debe encontrar la causa de ese fallo para eliminarlo y evitar así que se repita.

Asimismo, existe una preocupación creciente en la importancia de la mantenibilidad y fiabilidad de los equipos, de manera que resulta clave tomar en cuenta estos valores desde la fase de diseño del proyecto.

Otro punto importante es la tendencia a implantar sistemas de mejora continua de los planes de mantenimiento preventivo y predictivo, de la organización y ejecución del mantenimiento.

A continuación vamos a ver como han evolucionado las expectativas del mantenimiento que John Moubray describía en su tercera generación del mantenimiento:

Disponibilidad y Fiabilidad de los equipos- La disponibilidad y la fiabilidad de una máquina se siguen viendo en nuestros días como buenos indicadores de rendimiento para el mantenimiento. Las expectativas del mantenimiento en estas áreas se han mantenido e incluso aumentado en los últimos 15 años.

Mayor Seguridad- La seguridad sigue siendo una expectativa importante del mantenimiento, particularmente en el sentido de poder operar los equipos con seguridad. Tradicionalmente, la seguridad se centraba en eventos de alta frecuencia y pequeñas consecuencias. En los últimos años se está ampliando el estudio a eventos que aunque presentan una frecuencia muy baja traen consigo consecuencias muy graves (catástrofes industriales). Existe una creciente percepción de que las metodologías o sistemas de mantenimiento necesarios para evitar estas catástrofes industriales, deben ser diferentes que los usados típicamente para incidentes menos graves y más frecuentes. Para el control de este tipo de eventos se están desarrollando nuevas metodologías de mantenimiento basado en riesgo, sobre las cuales se realizará un amplio estudio en este proyecto.

Respeto del Medio Ambiente- En los últimos años hemos vivido una creciente sensibilización por parte de la opinión pública hacia la protección el medio ambiente, empujando a la creación de más y más fuertes normas y regulaciones medio ambientales. Las industrias deben centrarse en minimizar el impacto medioambiental de sus operaciones y dar una imagen de producción limpia. Para poder alcanzar estas expectativas, el papel del mantenimiento debe ser el de asegurar que los equipos funcionen correctamente conforme a las normas y regulaciones ambientales.

Mayor Calidad del Producto- En un mercado global, asegurar que el producto reúna todas las especificaciones de calidad sigue siendo un punto clave. Para las organizaciones que operan con "commodities", la calidad del producto es una de las pocas vías de diferenciar su producto respecto a sus competidores. El mantenimiento debe asegurar que el producto fabricado presenta los requisitos de calidad que han sido definidos para ese producto.

Aumento de la vida operativa de los equipos- El ritmo creciente de los cambios tecnológicos y la disminución de los ciclos de vida de los productos han provocado en algunos casos un descenso en la importancia de aumentar la vida operativa de los equipos, al menos en la parte que concierne al mantenimiento. A pesar de ello, evitar la "muerte prematura" de las máquinas sigue siendo un objetivo muy importante del mantenimiento.

Eficiencia de costes- La tercera generación de mantenimiento buscaba la optimización de sus gastos, para con ello colaborar en minimizar los costes totales de la organización. Esto es cierto, sólo en teoría. A pesar de las ventajas que podría tener conseguir mayor eficiencia en los costes del mantenimiento, la realidad ha sido que en muchas industrias- sobre todo en las intensivas en capital- lo que se ha hecho es minimizar la plantilla y conseguir un "mantenimiento esbelto" (Lean Maintenance) dentro de la organización, más que buscar un correcto nivel de gastos en mantenimiento.

A parte de estas características descritas anteriormente, existen otros dos temas importantes dentro del mantenimiento actual cuya importancia ha aumentado de manera muy importante en los últimos años:

- La Gestión del Riesgo
- Los nuevos Patrones de Fallo

1.3.5 La Gestión del Riesgo

Cada día cobra más importancia la identificación y control de los posibles sucesos que presentan una baja probabilidad pero consecuencias graves, sobretodo en organizaciones que operan en industrias con riesgo. El mantenimiento se está viendo como un participante clave en este proceso.

En el pasado, este tipo de sucesos se controlaban simplemente con una extensión de los Sistemas de Gestión de Seguridad y Medio Ambiente implantados en cada empresa. Sin embargo, existe una creciente percepción de que la aplicación de estos sistemas de gestión a los sucesos de "baja probabilidad / consecuencias graves" no es efectiva, por lo que es necesario desarrollar otras metodologías.

El accidente en la refinería de Longford, en Australia en 1998, ocurrió a pesar de que contaban con un Sistema de Seguridad de Mantenimiento de Clase Mundial. Como este desastre, otras muchas organizaciones han padecido accidentes de baja probabilidad y consecuencias graves en los últimos años a pesar de tener implantados sistemas apropiados de control. Estos sucesos, han puesto de manifiesto las limitaciones que presentan las actuales metodologías de gestión del riesgo como la Valoración Cuantitativa del Riesgo" (Quantitative Risk Assessment"), las Valoraciones Probabilísticas de Seguridad (Probabilistic Safety Assessments- PSA) y otras.

Evan y Manion [EVAN02] identifican los siguientes problemas asociados a este tipo de metodologías:

- Dificultad para identificar todos los factores potenciales de riesgo.
- Problemas con las incertidumbres en los modelados de los sistemas, especialmente para obtener datos probabilísticos realistas para eventos de baja frecuencia.
- Problemas para determinar las relaciones causa-efecto. A menudo éstas no son demostrables.
- La incertidumbre provocada por el factor humano, a menudo no se puede modelar.
- Problemas de complejidad y acoplamiento. El acoplamiento y la complejidad interactiva entre los componentes de un sistema anulan cualquier modelo completo de fallos potenciales de un sistema.
- El valor de la vida. El problema moral de asignar un valor monetario a la vida humana.

Para otros autores como Bougumil [BOUG24], el problema fundamental es que las probabilidades que se asignan a los modos de fallo individuales están basados en análisis no corroborados experimentalmente. Esto es especialmente cierto para las incertidumbres que aparecen debido a relaciones causa-efecto ocultas o desconocidas.

Con el objetivo de superar estas debilidades, las "Organizaciones Altamente Confiables" han desarrollado una serie de puntos culturales clave dentro de la organización a tener en cuenta:

- Preocupación ante los fallos. Cualquier fallo debe ser tenido en cuenta, por pequeño que sea, ya que la coincidencia de pequeños fallos en un mismo punto puede traer consecuencias graves.
- Reticencia a simplificar interpretaciones, teniendo en cuenta que el mundo real es complejo e impredecible.
- Sensibilidad en las operaciones. Se debe asegurar que los operarios de primera línea, donde se realiza el trabajo, sean conscientes de la situación y avisen cuando algo no va bien.
- Compromiso de resistencia. Se deben desarrollar capacidades para recuperarse ante los errores que ocurran.
- Respeto de la experiencia. Las decisiones se toman en la primera línea de producción y la autoridad recae sobre la persona con más experiencia, independientemente de su lugar o nivel dentro de la organización.

Asimismo podemos indicar una serie de funciones que utilizan las organizaciones para defenderse de los eventos de baja probabilidad y consecuencias graves:

- Crear una conciencia y un conocimiento del riesgo.
- Proporcionar una guía clara de cómo operar de manera que se evite el riesgo.
- Utilizar advertencias y alarmas cuando el peligro es inminente.
- Restablecer el sistema a una situación estable cuando este se encuentra en una situación anormal.
- Interponer barreras de seguridad entre el accidente y las pérdidas potenciales.
- Contener y eliminar el accidente, si sobrepasa la barrera.
- Proporcionar vías de escape y rescate por si el accidente no es contenible.

Algunas vías para intentar paliar las consecuencias graves de este tipo de eventos pueden ser:

- Medidas severas
 - Elementos automáticos de seguridad
 - Barreras físicas
 - Avisadores y alarmas
 - Elementos de corte
 - Equipos de Protección Personal
 - Etc.
- Medidas suaves

- Legislación
- Reglas y procedimientos
- Programas de mantenimiento
- Entrenamiento
- Informes y ejercicios
- Controles Administrativos
- Supervisión

Para conseguir un control efectivo de los sucesos de baja frecuencia y graves consecuencias desde el punto de vista del mantenimiento se necesita establecer una extensa capa de defensas contra el riesgo de manera efectiva. Para ello, no basta simplemente con la utilización de una herramienta simple de manejo del riesgo como RCM (Reliability-centered Maintenance), PMO (Plant Maintenance Optimization), QRA (Quantitative Risk Analysis), PSA (Probabilistic Safety Assessment) y otras, sino que habrá que complementarlas con estudios específicos para cada caso.

2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En instalaciones en las que se quiere optimizar la confiabilidad del proceso productivo y evitar accidentes de graves consecuencias, se hace hoy imprescindible conocer la probabilidad de que éstos acontezcan durante la vida del sistema. Ello obliga a la aplicación de técnicas de cuantificación del riesgo, como los árboles de sucesos y los árboles de fallos, los cuales precisan en último término del conocimiento probabilístico de fallos y errores de sucesos básicos, a fin de poder establecer la adecuación e idoneidad de las medidas preventivas.

Por estos motivos, los estudios de fiabilidad adquieren cada vez mayor relevancia en la actividad de prevención de los técnicos de seguridad y en general de los responsables de procesos u operaciones que puedan desencadenar situaciones críticas.

Una vez se hayan identificado los modos de fallo (para los componentes activos) y los mecanismos creíbles de degradación para los componentes estáticos, el primer paso en la evaluación del riesgo es determinar la **Probabilidad de Fallo (PdF)**

La probabilidad de fallo se define como la probabilidad de que ocurra el modo de fallo (de acuerdo con el modo de fallo dado) en un intervalo de tiempo definido T .

El intervalo de tiempo deberá ser fijo durante todo el análisis (si no se hace así, los riesgos no podrán ser comparados entre ellos o según algún otro criterio de aceptación).

Se pueden utilizar varios métodos para calcular la Pdf:

- **Enfoque analítico:** Consiste en estimar la Pdf utilizando modelos matemáticos y/o datos estadísticos para los procesos de degradación.
- **Solicitud experta:** Consiste en dejar al equipo de expertos en RBM (compuesto por personal clave de la planta con conocimiento experto de los equipos) evaluar la Pdf.

En la mayoría de los casos prácticos se utiliza una combinación de ambos métodos.

2.1 Confiabilidad

La confiabilidad ha sido especificada mediante las características intrínsecas del sistema de disponibilidad, fiabilidad, mantenibilidad y soporte de mantenimiento. Sin embargo, otros factores pueden reducir significativamente los niveles logrados para estas medidas, por debajo de los niveles intrínsecos. Potencialmente, los más importantes son la calidad de la fabricación y el mantenimiento del sistema, que pueden introducir nuevas averías en el mismo.

Los niveles de fiabilidad, mantenibilidad, disponibilidad y soporte de mantenimiento conseguidos por un sistema dependen de las condiciones en las que se utiliza y también del perfil de su misión. Puede ser importante tener en cuenta no sólo las condiciones en las que operará el sistema sino también la política de mantenimiento y la organización para el soporte de mantenimiento del mismo.

Por tanto, es esencial que se gestione activamente la confiabilidad a lo largo del ciclo de vida del sistema. Esto abarca tanto el proceso de adquisición como el de utilización, y las actividades de gestión requeridas serán distintas en uno y otro caso. Si la confiabilidad no se gestiona adecuadamente ya sea en el proceso de adquisición o durante la utilización, existe una mayor probabilidad de que no se alcancen los requisitos de fiabilidad o de disponibilidad.

El ciclo de vida del sistema puede tener un efecto significativo en la confiabilidad conseguida del sistema. Además, la fiabilidad puede variar a lo largo de la vida, ya que muchos sistemas pueden presentar tasas de fallo variables con el uso, debido a desgaste de componentes o subsistemas. Esta variación de las características de fiabilidad con el uso significa que, para muchos sistemas, no es válida la hipótesis de tasa de fallo constante y que tienen que emplearse distintas distribuciones de probabilidad, que requieren expresiones matemáticas más complejas, para estimar las características de fiabilidad

2.2 Coste del Ciclo de Vida

Actualmente se exige que los productos sean fiables. Deben desempeñar sus funciones de forma segura sin excesivo impacto en el medioambiente y ser fáciles de mantener durante su vida útil. La decisión de compra no solo está condicionada por el coste inicial del producto (coste de adquisición) sino también por la previsión de coste de operación y mantenimiento del producto durante su vida útil (coste de propiedad) y por el coste de eliminación. Para lograr la satisfacción del cliente, el reto de los fabricantes es lograr productos que cumplan los requisitos, sean fiables y tengan un coste competitivo mediante la optimización de los costes de adquisición, propiedad y eliminación. Además, los sistemas que fallan repetidamente adquirirán pobre reputación frente al usuario. Por otra parte,

diseñar y fabricar sistemas con altos niveles de fiabilidad puede ser caro y posiblemente no se puedan producir a un precio competitivo. Por tanto, hay que encontrar un equilibrio entre sistemas de baja fiabilidad que son muy costosos de mantener y sistemas de alta fiabilidad que pueden ser caros de diseñar y construir.

Hay un nivel de fiabilidad para el que se minimizan los costes totales durante la vida del sistema. Si se trata de un sistema comercial, este nivel mínimo de coste cambiará en la medida en que los costes de diseño y desarrollo puedan repartirse entre muchas unidades. Sin embargo, la fiabilidad óptima de un sistema puede estar afectada por otros aspectos tales como los requisitos de seguridad o la función del sistema y no tiene por qué coincidir, necesariamente, con la fiabilidad correspondiente al mínimo coste del ciclo de vida.

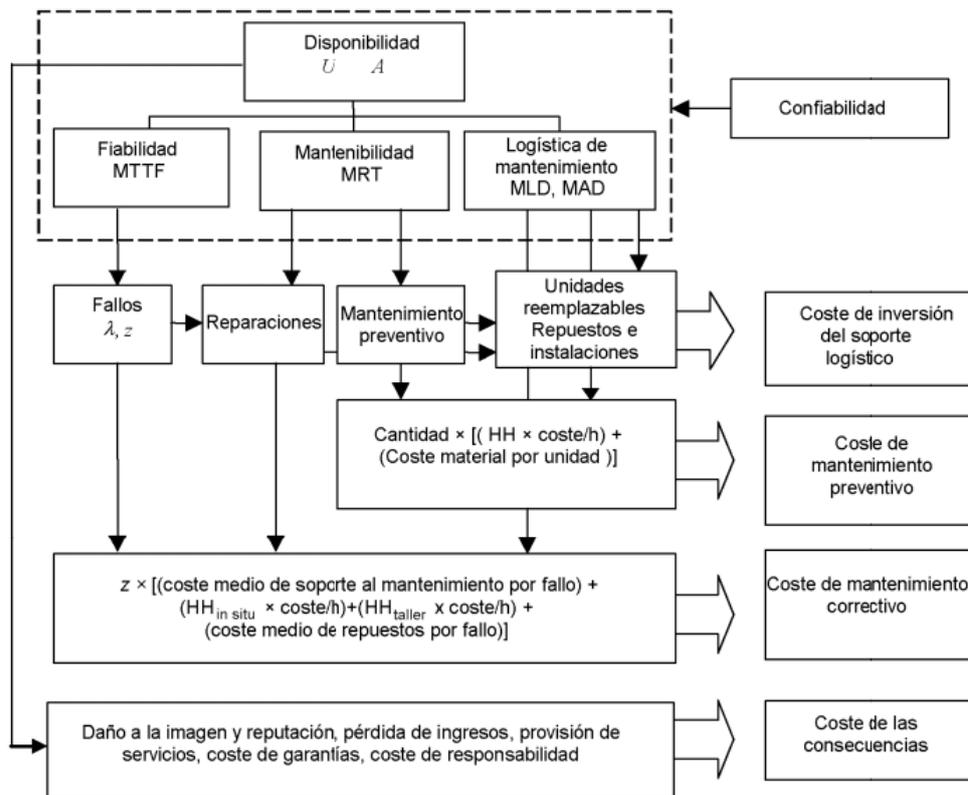


Figura Relación Típica entre Confiabilidad y Coste del Ciclo de Vida para la Fase de Operación y Mantenimiento

Los costes asociados con los elementos de confiabilidad pueden incluir, cuando se apliquen, lo siguiente:

- Coste de restablecimiento del sistema incluyendo el coste de mantenimiento correctivo;
- Coste de mantenimiento preventivo;
- Costes de las consecuencias.

La figura destaca algunos elementos de confiabilidad convertidos en costes de operación y mantenimiento.

La Confiabilidad se ha considerado bajo los siguientes cuatro aspectos:

- Disponibilidad
- Fiabilidad $R(t)$, incluyendo tiempo medio hasta el fallo (MTTF) (Mean Time To Failure), tiempo medio de funcionamiento entre fallos (MTBF) (Mean Time Between Failures).
- Mantenibilidad, incluyendo tiempo medio de indisponibilidad (MDT) (Mean Down Time) y tiempo medio hasta la restauración (MTTR) (Mean Time To Restoration).
- Soporte de mantenimiento.

2.3 Disponibilidad

Para algunos sistemas, especialmente para sistemas complejos, es necesario considerar conjuntamente la fiabilidad y el mantenimiento. En tales sistemas puede ser conveniente especificar requisitos de disponibilidad a nivel de sistema en vez de especificar por separado requisitos de fiabilidad y de mantenibilidad. Los requisitos de disponibilidad en régimen permanente son los más comúnmente utilizados aunque también puede ser adecuada la disponibilidad media.

Industrias en las que la disponibilidad puede ser la principal característica de confiabilidad, son, por ejemplo, el sector ferroviario, en el que los operadores ferroviarios exigen un porcentaje de trenes disponibles para su utilización durante periodos de punta o un retraso máximo, y el sector de las telecomunicaciones, donde el operador requiere un cierto número de canales de comunicación disponibles, de forma que el sistema mantenga una disponibilidad general, aunque ciertas rutas puedan estar no disponibles debido a los distintos enrutamientos existentes.

Se define la disponibilidad $D(t)$ como la probabilidad en el tiempo de asegurar un servicio requerido. Otra definición común en para la disponibilidad es: el porcentaje de equipos o sistemas útiles en un determinado momento, frente a la totalidad de equipos o sistemas.

La ecuación de la disponibilidad está en función de la fiabilidad y de la mantenibilidad, siendo:

$$D(t) = \frac{R(t)}{R(t) + M(t)} = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

En la Figura se aprecia cómo se conforman el MTBF (Mean Time Between Failures, tiempo medio entre fallo) por los distintos TBF que hacen referencia al tiempo de funcionamiento de un activo y el MTTR (Mean Time To Restoration, tiempo medio hasta la restauración) por los TTR que se refieren a los tiempos de paradas por reparación.

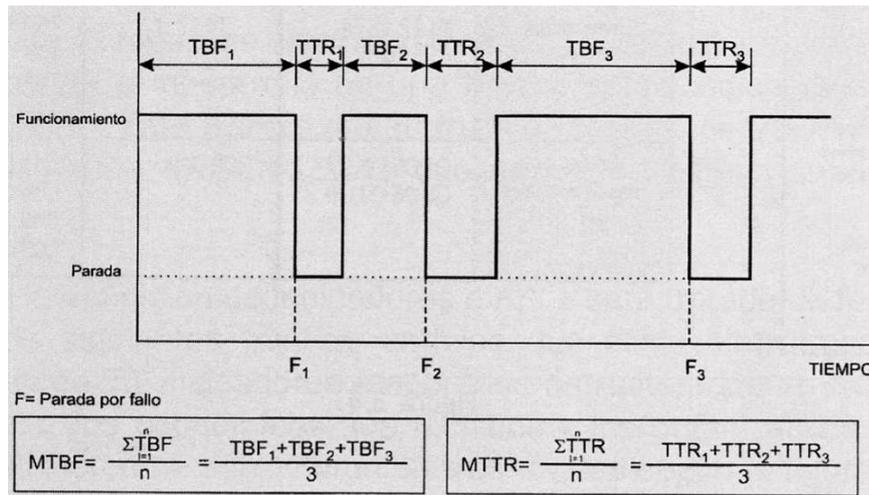


Figura Representación de los Estados TBF y TTR

2.4 Fiabilidad

2.4.1 Fiabilidad en Función del Tiempo

En algunos sistemas, es necesario considerar directamente su fiabilidad. En tales sistemas, puede ser apropiado especificar por separado los requisitos de fiabilidad y de mantenibilidad a nivel del sistema. Por definición, la fiabilidad es la capacidad de un sistema para realizar una función requerida en condiciones determinadas durante un intervalo de tiempo dado, esto es sin fallo.

Sin embargo, muchas especificaciones definirán la fiabilidad requerida mediante el empleo de medidas alternativas, tales como el tiempo medio hasta el fallo (MTTF) (Mean Time To Failure) o el tiempo medio de operación entre fallos (MTBF) (Mean Time Between Failures).

Una definición correcta de la fiabilidad sería como la probabilidad de que el sistema complete su funcionamiento satisfactorio a lo largo del tiempo. El supuesto subyacente implícito es que en una muestra de dispositivos idénticos, la supervivencia (o duración de vida) se dispersa de una manera que se modela bien con la probabilidad y, por tanto, con una función de distribución. Por tanto, la extensión de las medidas de fiabilidad para incluir el tiempo implica la especificación de las distribuciones de probabilidad, las cuales deben ser modelos razonables de la dispersión de duración de vida.

Entre las industrias en las que las características de fiabilidad pueden ser la principal característica de confiabilidad, se pueden citar la industria aeroespacial, donde una vez que un avión ha despegado es esencial que complete el vuelo sin un fallo total y la industria automovilística, donde el conductor necesita llegar a su destino y puede efectuar el mantenimiento del vehículo una vez que se encuentra en su destino.

Por tanto, es conveniente distinguir entre productos reparables y no reparables:

- Productos no reparables: solo un fallo puede ocurrir. Ejemplos: bombillas de luz, transistores, motores a propulsión, microprocesadores, etc.

- Productos reparables: más de un fallo puede ocurrir. En este caso es importante considerar la disponibilidad del producto reparado (que dependerá de la ocurrencia de fallos y del tiempo de mantenimiento. Ejemplos: automóviles, lavadoras, etc.

2.4.2 Medidas de Fiabilidad

La fiabilidad puede ser indicada y cuantificada mediante diversas funciones que son indicados a continuación:

- La medida inicial de la fiabilidad sería el **MTBF** (Mean Time Between Failures) o tiempo medio entre fallos

$$MTBF = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

En la práctica, la fiabilidad se mide como el tiempo medio entre dos fallos consecutivos MTBF. Se puede medir en general por horas, kilómetros, horas de vuelo, piezas producidas,... etc.

- **R(t)** es la Función de Fiabilidad (Reliability Function) o función de supervivencia en el tiempo t , o dicho de otro modo, la probabilidad de que un componente nuevo sobreviva más del tiempo t , donde T se define de forma genérica como el tiempo de vida del componente, siendo una variable continua y que toma valores en el intervalo $[0, \infty)$

$$R(t) = P(\tau > t) = \int_t^{\infty} f(t) dt = 1 - F(t)$$

Esta función es continua, monótona decreciente y además verifica que:

$$R(0) = 1$$

$$R(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t)) = 0$$

- **F(t)** es la Función de Distribución de la variable aleatoria continua T , representa la probabilidad acumulada de fallo hasta el tiempo t , es decir:

$$F(t) = P(T \leq t)$$

Esta función es continua, monótona no decreciente y además verifica que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

- El p -cuantil de la distribución de T es el valor t_p que verifica:

$$F(t_p) = P(T \leq t_p) = p$$

lo que equivale a la expresión:

$$t_p = F^{-1}(p)$$

donde F^{-1} es la función inversa de F .

- Derivando la función de distribución obtenemos la Función de Densidad $f(t)$. Ésta nos da una idea de la dispersión de la vida del componente

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}$$

- La vida esperada o tiempo medio entre fallos MTBF está relacionada con la función de densidad a través de la esperanza matemática del tiempo de vida T mediante la expresión

$$\theta = E[\tau] = \int_0^{\infty} tf(t)dt = MTBF$$

La vida esperada o MTBF para sistemas no reparables, se convierte en tiempo medio hasta el fallo (MTTF) (Mean Time To Failure).

- Un concepto importante a considerar cuando se trabaja con distribuciones asociadas a tiempos de vida es **la Función de Riesgo** (hazard function) o **Tasa de Fallo** (failure rate) $h(t)$, que se define como la probabilidad instantánea de que una componente falle en el instante t . En términos de probabilidad se interpreta como el límite de la probabilidad condicionada de que T falle antes del tiempo $t + \Delta t$ conociendo que no había fallado en el instante t . Esto no es más que el cociente entre la función de densidad $f(t)$ y la función de fiabilidad $R(t)$. Entonces, la función de riesgo $h(t)$ sería:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

La función de riesgo $h(t)$ es una característica de fiabilidad del componente. No tiene interpretación física directa. Es bastante común que el comportamiento de fallos de un componente sea descrito en términos de su tasa de fallos.

- $H(t)$ es la **Función de Riesgo Acumulada** (cumulative hazard rate) o tasa de fallos acumulada y se define como:

$$H(t) = \int_0^t h(t)dt$$

La función de riesgo acumulada $H(t)$ y la función de distribución $F(t)$ verifican la siguiente relación:

$$H(t) = -\log(1 - F(t)).$$

La función de riesgo $h(t)$ es una característica importante de las distribuciones asociadas a variables correspondientes a tiempos de vida:

- **Funciones de riesgo decrecientes.**

Se observa en productos cuya probabilidad de fallo es menor cuando aumenta el tiempo de supervivencia. Esto aparece a menudo en cualquier tipo de materiales: al principio de su funcionamiento la probabilidad de fallo es alta debido a la existencia de posibles defectos ocultos. A medida que transcurre el tiempo esta probabilidad se estabiliza a un nivel más bajo, pues si el elemento ha sobrevivido será porque no tenía ese defecto oculto.

- **Funciones de riesgo constantes.**

Indica que la probabilidad de fallo instantáneo es la misma en cualquier momento y consecuentemente el proceso no tiene memoria, ya que la posibilidad de fallo estando funcionando, es idéntica en cualquier momento de la vida del componente. A pesar de que esto pueda parecer irreal, este tipo de modelo es muy utilizado en la práctica, tanto por su sencillez como por el hecho de que representa bien los periodos intermedios de vida de muchos productos. Por ejemplo si se tienen componentes electrónicos cuya vida es muy larga instalados en sistemas que cuentan con elementos mecánicos de vida útil muy inferior, el modelo de tasa de fallos constante es perfectamente adecuado.

Cabe esperar tasas de fallo constantes cuando el fallo se produce por cargas excesivas que se producen aleatoriamente en el tiempo.

Tienden a aparecer en conjuntos donde los fallos son debidos a un fenómeno aleatorio como accidentes o shocks.

- **Funciones de riesgo crecientes.**

Surgen, en la mayoría de los casos por desgastes y fatigas, es decir por un proceso de envejecimiento. La tasa de fallos creciente indica que la probabilidad de fallo inmediato, teniendo en cuenta que el componente está funcionando, se incrementa a medida que pasa el tiempo. Evidentemente a medida que un componente se hace más viejo, su tasa de fallos tenderá a crecer.

La generalización del proceso anterior conduce a la curva de Davies o bañera (Bathtub Curve), que se corresponde con la figura y representa la probabilidad de fallo instantáneo de un elemento que se comporta inicialmente de forma decreciente (a esta zona se le denomina de mortalidad infantil), en su vida media con una probabilidad de fallo casi constante (zona de vida útil), y finalmente con probabilidad de fallo que aumenta con la edad (zona de deshecho, wearout). Esta curva es muy habitual en elementos reales, aunque en la práctica muchas veces se simplifique estudiando únicamente su zona central, que tiene tasa de fallo constante.

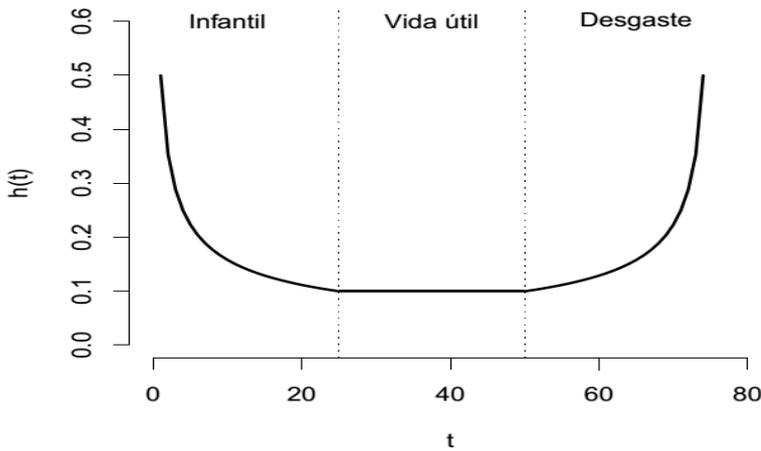
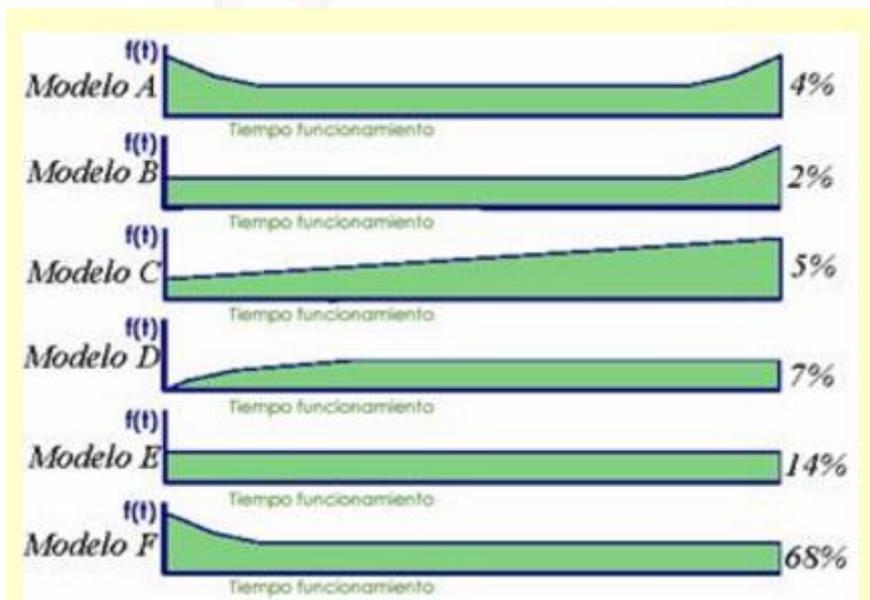


Figura Curva de Davies o Bañera de la Función de Riesgo Combinado

2.4.3 Patrones de Fallo

Las nuevas investigaciones están cambiando muchas de las tradicionales creencias sobre la relación existente en una máquina entre el envejecimiento y el fallo. En particular, se ha demostrado que para muchos equipos existe muy poca relación entre el tiempo de operación y la probabilidad de fallo.



El enfoque inicial del mantenimiento suponía que la probabilidad de que una máquina falle aumenta según el tiempo de operación, siendo mayor la probabilidad de fallo en la "vejez" de la máquina (patrón de fallo A en la Figura).

La segunda generación de mantenimiento introdujo el concepto de "mortalidad infantil". De esta forma la tasa de fallos de una máquina puede ser representada con una curva de bañera, existiendo, por tanto, más probabilidad de fallo durante el principio y el final de su vida útil (patrón de fallo B en la Figura).

Sin embargo, en el mantenimiento actual se ha demostrado que podemos definir seis patrones diferentes de tasa de fallos, según el tipo de máquina que estemos utilizando.

Tener en cuenta el patrón al que se ajusta cada elemento es fundamental si se quiere conseguir una óptima planificación del mantenimiento. Debemos estar seguros de que el mantenimiento que ha sido planificado es el adecuado, ya que de nada sirve realizar el trabajo planificado de manera correcta, si éste no es el más adecuado.

Para los patrones de fallo "A", "B" y "C", la probabilidad de fallo aumenta con la edad hasta alcanzar un punto en el que es conveniente reemplazar el componente antes de que falle y así reducir su probabilidad de fallo.

En el caso de los componentes que presentan una probabilidad de fallo del "modelo E", reemplazar el componente no mejorará en ningún caso su fiabilidad, ya que el nuevo elemento tendrá la misma probabilidad de fallo que el antiguo.

Si el patrón de fallo al que se ajusta el componente es el "F", reemplazar el elemento a intervalos fijos por un componente nuevo, no sólo no mejorará la fiabilidad, sino que aumentará la probabilidad de fallo, ya que en la "infancia" presenta más mortalidad que en la vejez.

En el gráfico se observa que más del 50% de los componentes presentan fallos en la "infancia". Esto quiere decir que cada vez que se repara o reemplaza un equipo, las posibilidades de fallo prematuro debido a esa operación de mantenimiento son muy elevadas.

Alguna de las posibles explicaciones que se pueden dar a este hecho, son:

- Errores humanos. La tarea de reemplazo o reparación no se completa de manera adecuada por falta de experiencia o conocimiento del personal de mantenimiento
- Errores del sistema. El equipo se vuelve a poner en servicio tras haberle realizado una operación de mantenimiento de alto riesgo y no haber revisado dicha operación.
- Errores de diseño. La capacidad de diseño del componente está demasiado cerca del rendimiento que se espera de él, por lo que las piezas de menos calidad pueden fallar cuando se le exige dicho rendimiento.
- Errores de piezas. Se suministran piezas incorrectas o de baja calidad.

Por lo visto anteriormente, está claro que el mantenimiento actual debe centrarse en reducir las operaciones de mantenimiento provocadas por fallos que se ajustan al "modelo F". Es decir, fallos ocurridos en la "infancia" de los equipos. Para los elementos que ajusten su tasa de fallos a este patrón "F", un mantenimiento planificado a intervalos fijos aumentará las posibilidades de fallo, ya que el equipo nuevo presentará más probabilidad de fallo que el antiguo. Por ese motivo existe una tendencia generalizada a "mantener lo mínimo posible", debido a que cualquier operación de mantenimiento realizada puede aumentar la probabilidad de fallo.

Otra posibilidad, es centrarse en reducir de manera global las probabilidades de fallo sobre todos los modelos. La forma de realizar esto, es mediante la utilización de un Mantenimiento Proactivo, es decir buscar la forma de eliminar los fallos, más que eliminar sus consecuencias.

Para eliminar los fallos, hay que eliminar sus causas, lo que implica conocerlas. Existen herramientas como el Análisis Causa-Raíz que ayudan a identificar y eliminar las causas de los fallos, aunque en muchas ocasiones se utiliza como una herramienta reactiva más que proactiva.

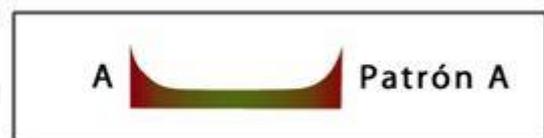
La eliminación proactiva de las causas de fallo implica la utilización de metodologías y herramientas que proporcionen:

- Asegurar que los equipos utilizados han sido adecuadamente diseñados para la operación requerida y que a la hora de su adquisición se han tenido en cuenta su mantenibilidad, y coste de ciclo de vida, más que minimizar la inversión. Esto requiere una interacción importante entre los ingenieros y el personal de mantenimiento.
- Asegurar que los equipos están operando dentro de sus condiciones de diseño. Esto requiere un aumento en la disciplina del personal de producción a la hora de ajustarse a los estándares, documentos y procedimientos de operación.
- Asegurar un correcto funcionamiento de la gestión de los repuestos e inventarios.
- Asegurar que los procesos de reparación funcionan correctamente, de tal forma que se asegure que los equipos son reparados correctamente a la primera. Esto requiere un alto grado de atención en los detalles y una mayor disciplina en la organización.

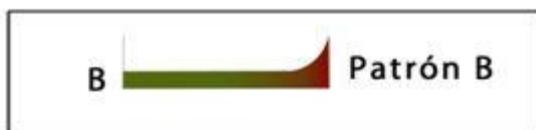
Los equipos estáticos siguen fundamentalmente los patrones "A" o "F", aunque existen pocos datos estadísticos. Para muchos mecanismos de degradación el modelo más común es aplicar un patrón como el de tipo "C", donde la tasa de fallos aumenta en función del tiempo de operación.

Patrón de fallo "A"

Este patrón de fallo, llamado "curva de bañera", es realmente una combinación de dos patrones de fallo diferentes, uno de los cuales contiene mortalidad infantil y el otro muestra una probabilidad de fallo que aumenta con la edad. Incluso se puede considerar un tercer período (la parte central de la bañera) donde se produce fallos de manera aleatoria.



Patrón de fallo "B"



Este patrón de fallo muestra una probabilidad de fallo constante o en ligero aumento y una zona final de agotamiento donde la probabilidad de fallo aumenta rápidamente.

Un elemento que tenga que desarrollar una función, la cual le someta a un estrés o fatiga irá deteriorando su resistencia a dicho estrés hasta un punto en el cual, el elemento ya no puede desarrollar el rendimiento esperado y por tanto falla. Se suele relacionar la exposición total a la fatiga con la vejez del elemento. Esta conexión entre fatiga y tiempo sugiere que debe haber una relación directa entre el deterioro y la vejez de un componente y por tanto el punto en el que falle dependerá de su vejez. En elementos que se rigen según este patrón de fallos, se comprueba que elementos idénticos trabajando en condiciones iguales

tienden a fallar alrededor de un valor denominado "vida media" de los componentes. Aunque no es inusual que aparezcan elementos que fallan de manera prematura.

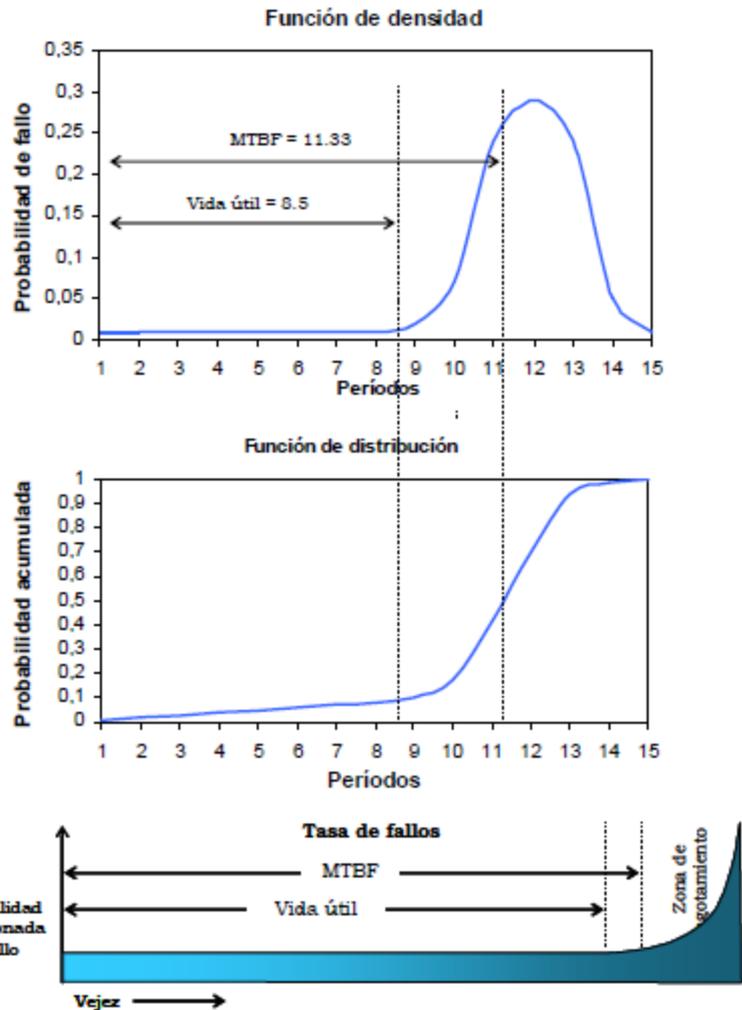
Se aprecia en la Figura, que la palabra "vida" puede tener dos significados diferentes. La primera sería "Tiempo medio entre fallos o MTBF", lo cual indica la vida media de los componentes. La segunda estaría marcada por el punto en el cual se produce un incremento importante de la probabilidad condicionada de fallo.

Esta se denomina "vida útil" del componente.

Si se realiza la inspección o reemplazo de los componentes en el MTBF, la mitad de ellos ya habrán fallado, lo que puede conducir a consecuencias operacionales inaceptables. Por tanto, si lo que se busca es prevenir la mayoría de los fallos, es necesario intervenir al final de la vida útil del elemento, aunque esta sea menor que el MTBF (Tiempo Medio Hasta el Fallo)

Se puede concluir que para elementos que se rigen según el patrón de fallo "B", no se debe utilizar el MTBF para establecer la frecuencia de reemplazo o de las tareas inspección.

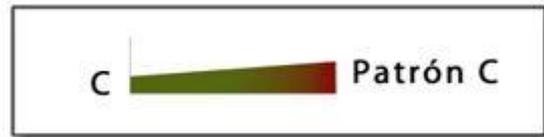
Otro hecho a tener en cuenta es que reemplazando el componente al final de su vida útil, la media de vida de servicio de cada componente será menor que si lo hubiésemos dejado funcionando hasta el fallo. Esto provoca un aumento del coste del mantenimiento.



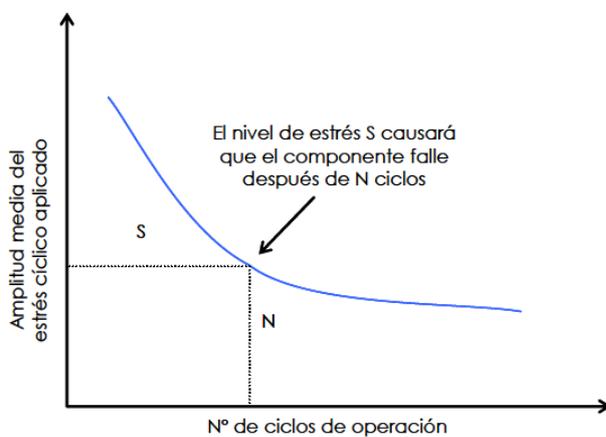
Actualmente muy poco elementos se ajustan a este patrón de fallos, siendo mucho más común encontrar modos de fallos que no presentan una relación “vejez-fallo”. Un ejemplo de un elemento que se comporta según este patrón puede ser el impulsor de una bomba que bombee un líquido moderadamente abrasivo.

Patrón de fallo “C”

Este patrón muestra una probabilidad de fallo creciente durante todos los períodos, pero sin alcanzar un punto en el que se pueda considerar al elemento como “desgastado”.



La fatiga es la causa más probable que puede crear que una tasa de fallos tome esta forma. El fallo por fatiga está provocado por un estrés cíclico y la relación entre el estrés cíclico y el fallo está gobernada por la curva S-N que se muestra en la Figura



Parece que conociendo la curva S-N, se podría predecir con precisión la vida de un componente para una amplitud de estrés cíclico dado. Sin embargo, esto no es posible en la realidad porque la amplitud del estrés no es constante y la capacidad de resistir a la fatiga no es la misma para todos los componentes.

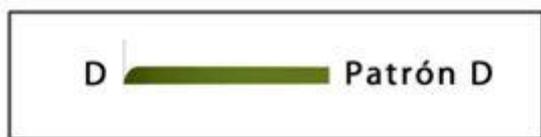
Se demuestra que la función de densidad de elementos de este tipo, se puede ajustar aceptablemente a una distribución

de Weibull de parámetro de forma $\beta=2$.

Este patrón de tasa de fallos no está asociado únicamente a la fatiga. Por ejemplo, se ha descubierto que es válido para ajustar el fallo de aislamiento en los bobinados de los generadores. De la misma forma no todos los fallos relacionados con la fatiga se tienen que ajustar necesariamente a este patrón

Patrón de fallo “D”

Este patrón presenta una probabilidad condicionada de fallo asociada a una distribución de Weibull de parámetro de forma $1 \leq \beta \leq 2$.



El modelo D muestra una probabilidad de falla baja cuando el componente es nuevo o se acaba de instalar, seguido de aumento rápido a un nivel constante.

un nivel constante.

Estrategias recomendadas:

- Monitoreo de la condición.
- Análisis de fallas si la tasa de falla es muy elevada.

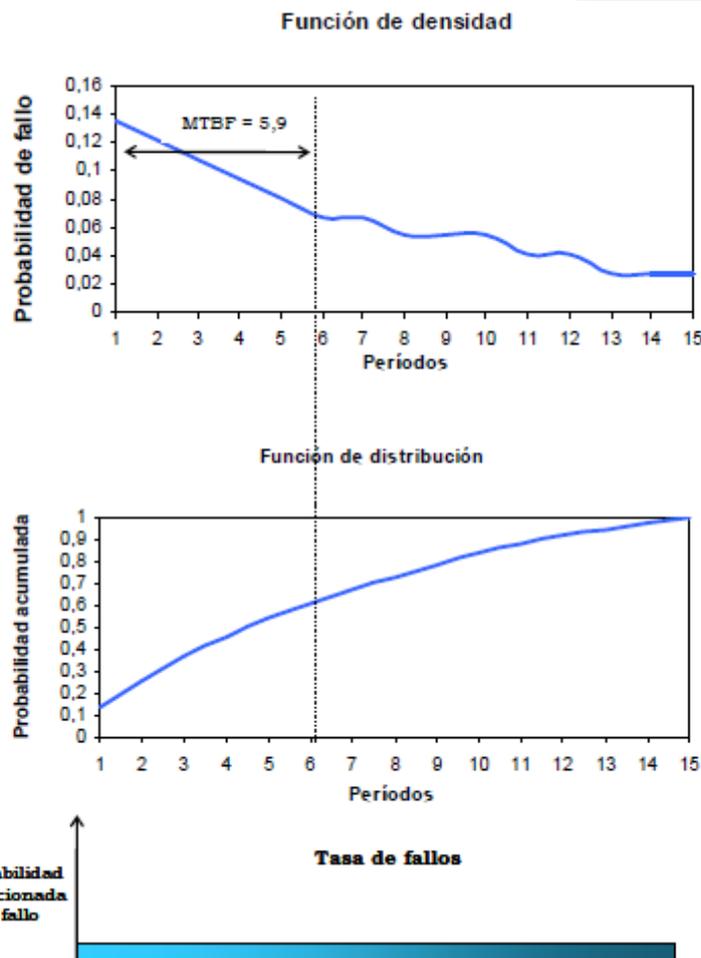
- Provisión de repuestos.

Patrón de fallo “E”

Este patrón de fallo muestra una probabilidad de fallo constante durante toda la vida del componente. Representa componentes que fallan de una manera aleatoria independientemente del tiempo que lleven funcionando



El modelo E muestra una probabilidad constante de falla en todas las edades (falla aleatoria), es decir, no existe ninguna relación entre la edad de los equipos y la probabilidad de que fallen.



La Figura muestra como una probabilidad condicionada de fallo constante implica una función de densidad y una función de distribución exponenciales.

Este patrón no muestra en ningún momento un aumento significativo en la probabilidad de fallo condicionada y por tanto no se deberían contemplar sustituciones programadas.

A pesar de que es imposible predecir cuando va a fallar un componente que se rige según este patrón, sí es posible calcular el tiempo medio entre fallos (MTBF) (ver Figura), pero no existe una “vida útil” como en el caso de otros patrones.

El MTBF proporciona una base para comparar la fiabilidad de dos elementos diferentes que se rigan según este patrón de fallos. El componente que presente una mayor MTBF tendrá menos probabilidad de fallar en un período dado.

Un ejemplo de componente cuyos fallos se presentan de una manera aleatoria son los rodamientos de bola. En general este tipo de componentes presentan una curva P-F (Curva de fallo potencial-funcional que se tratará más adelante) que muestra como el elemento comienza a deteriorarse hasta el punto en el que puede detectarse (punto P) y después si no se corrige sigue deteriorándose hasta que llega al punto correspondiente al fallo funcional (punto F). Por tanto, al avisar antes del fallo, se podrán aplicar métodos de mantenimiento en condición para prevenir el fallo.

Sin embargo, esto no quiere decir que el mantenimiento en condición se use solo en componentes que fallan de manera aleatoria. También se puede aplicar a elementos que fallen en relación a su tiempo de uso

Patrón de fallo “F”

Este patrón es el más común de todos y el único en el cual la probabilidad de fallo decrece con la edad (a parte del caso “A” que es un caso especial como ya hemos comentado)

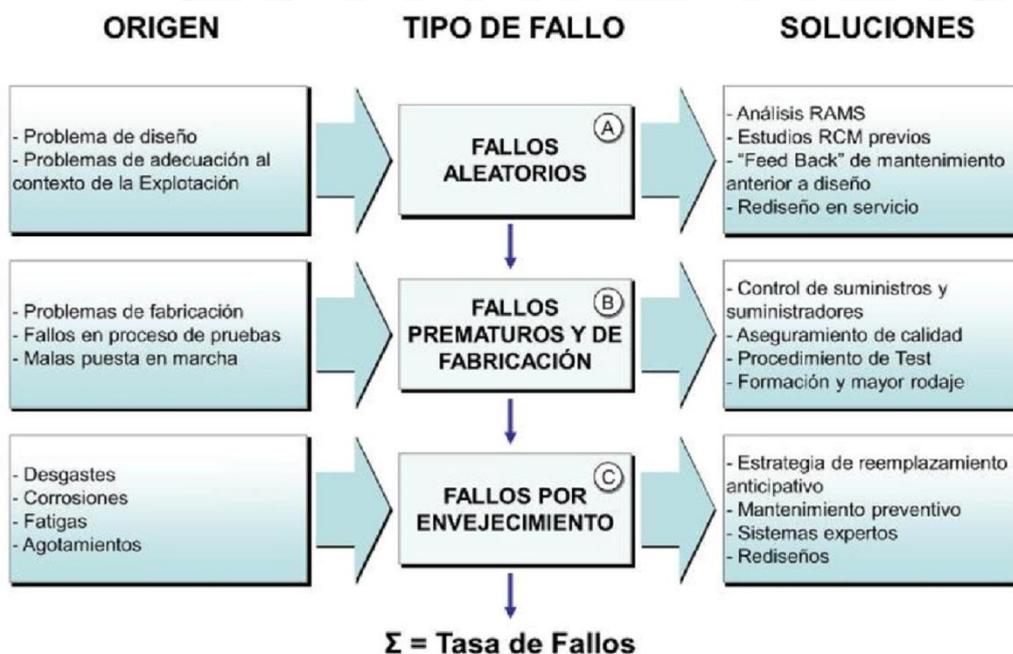


La forma del patrón de tasa de fallos “F” es tal que la probabilidad más alta de fallo ocurre cuando el equipo está nuevo o justo después de una revisión. Este fenómeno se conoce como “mortalidad infantil” y tiene una amplia variedad de causas.

Las tareas de mantenimiento rutinario innecesarias o demasiado invasivas son responsables en muchos casos de la mortalidad infantil de un equipo. Se debe evitar realizar tareas innecesarias y seleccionar aquellas que menos perturban el funcionamiento de los equipos.

Se debe reducir el mantenimiento rutinario al mínimo esencial, lo que significa menos intervenciones desestabilizadoras, sin que ello suponga la aparición de fallos que podían haber sido anticipados o prevenidos. La premisa de “mantener lo mínimo posible” cada día toma más importancia

En la Figura se presenta una matriz con las posibles soluciones en función del tipo de fallo producido



3. Distribuciones Estadísticas

El criterio de selección de una distribución de probabilidad a utilizar en un análisis de fiabilidad se basa usualmente mediante la función de riesgo, pues de acuerdo a la información que el investigador tenga del fenómeno que causa el fallo, puede determinar las características que el modelo debe seguir en la forma de la tasa de fallo conforme avanza el tiempo (creciente, decreciente o en forma de bañera).

En principio, se puede utilizar cualquier función de distribución para crear un modelo de duración de vida de los equipos. En la práctica, las funciones de distribución que tienen funciones de riesgo monótonicas parecen más realistas y, dentro de esta clase, existen unas pocas que son consideradas como aquellas que proporcionan los modelos más razonables de fiabilidad de dispositivos.

Se presentan a continuación las distribuciones más comunes en modelos de fiabilidad con sus expresiones matemáticas y representación gráfica realizadas mediante R, (Apéndice 4, apartado 1).

3.1 Distribución Normal

Es la distribución utilizada con más frecuencia en estadística, aunque no ocurre así en estudios de fiabilidad debido a su carácter simétrico, ya que habitualmente los tiempos de vida presentan un comportamiento asimétrico.

Una variable aleatoria continua T tiene una distribución Normal, y se indicaría como $T \sim N(\mu, \sigma)$, siendo sus funciones principales las siguientes:

3.1.1 La Función de Densidad $f(t)$.

Siendo μ y σ los parámetros del modelo, que se denominan media y desviación típica, respectivamente. Tiene una forma acampanada y es simétrica respecto a la media. A continuación se indica la expresión analítica y la representación gráfica (figura) de diversas funciones de densidad para una media igual en todas ellas ($\mu = 3$) pero con variación en la desviación típica ($\sigma = 0.25, 0.5, 1, 1.5$ y 2).

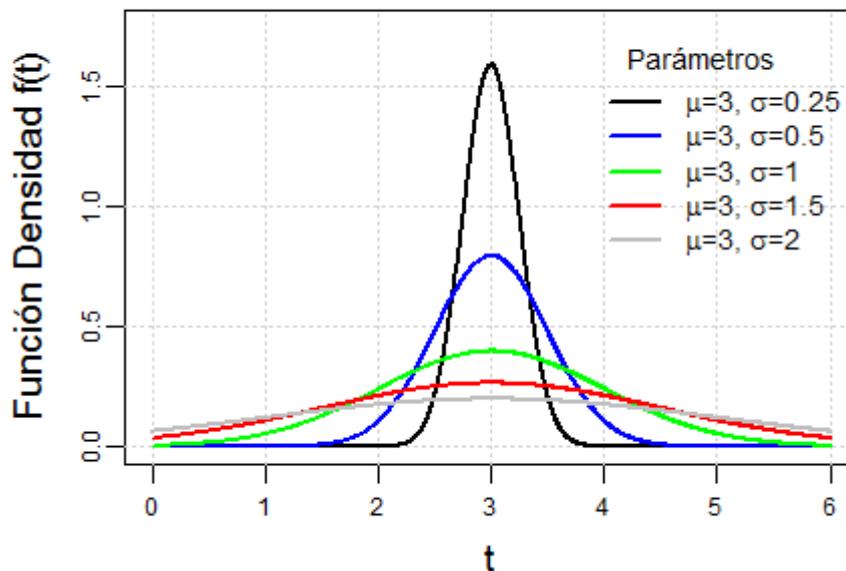
$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

```
#####
# 1.1 Distribución Normal #
#####
#
# Función de densidad f(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
```

```

mean <- c(3, 3, 3, 3, 3)
sd <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=0.25")), expression(paste(, mu,
"=3, ", sigma,"=0.5")), expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1")),
expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1.5")), expression(paste(, mu, "=3, ",
sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,1.75),type="n",xlab="t", ylab="Densidad f(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1, cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,dnorm(x, mean[i], sd[i],log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")

```



3.1.2 La Función de Distribución F(t)

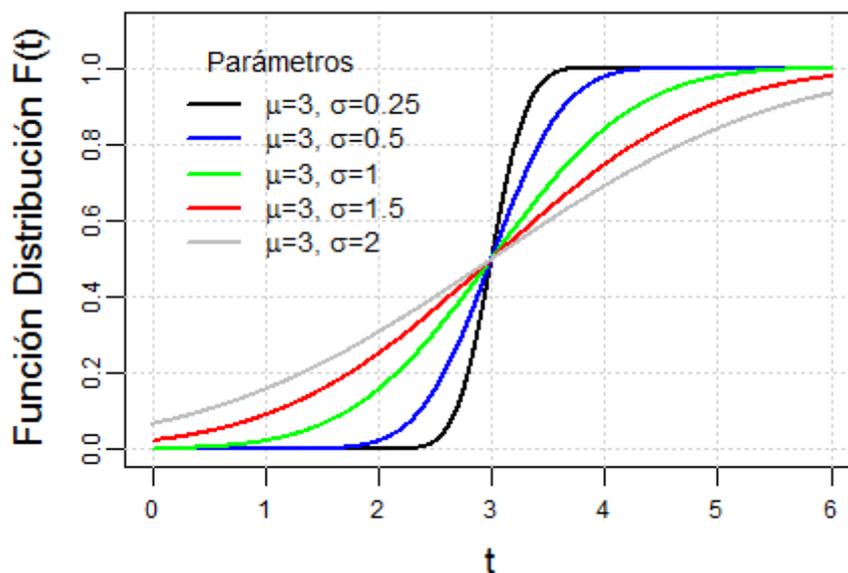
Cambia su forma en el punto del valor de la media, siendo más o menos pronunciada en virtud de su desviación típica. Su expresión se indica a continuación y su representación gráfica se puede observar en la figura.

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)} dx$$

```

#
# función de distribución F(t) par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2)) x <-
seq(0,6,len=1000)
mean <- c(3, 3, 3, 3, 3)
sd <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=0.25")), expression(paste(, mu,
"=3, ", sigma,"=0.5")), expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1")),
expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1.5")), expression(paste(, mu, "=3, ",
sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Distribución F(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,pnorm(x, mean[i], sd[i], lower=TRUE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, esta distribución se denomina Distribución Normal Estándar, cuya Función de Densidad $\phi(t)$ sería

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

y su Función de Distribución $\Phi(t)$ sería:

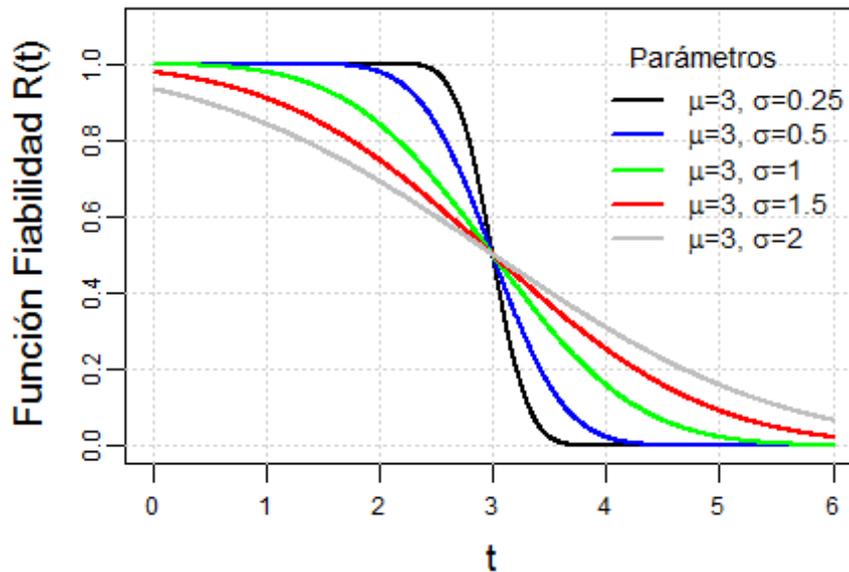
$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(u) du$$

3.1.3 La Función de Fiabilidad

Decrece a cero con mayor rapidez para valores pequeños de desviación típica., como se aprecia gráficamente en la figura

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)} dx$$

```
#
# función de Fiabilidad R(t)=1-F(t) par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2)) x <-
seq(0,6,len=1000)
mean <- c(3, 3, 3, 3, 3)
sd <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=0.25")), expression(paste(, mu,
"=3, ", sigma,"=0.5")), expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1")),
expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1.5")), expression(paste(, mu, "=3, ",
sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Fiabilidad R(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,pnorm(x, mean[i], sd[i], lower=FALSE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



3.1.4 La Función de Riesgo o Tasa de Fallo h(t)

Está representada en la figura, se observa claramente la influencia de la desviación típica en la tasa de fallo en el tiempo, con una desviación típica menor el riesgo aumenta

$$h(t) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sigma \cdot \text{Erfc}\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)}$$

siendo Erfc la función del error complementario, definida como

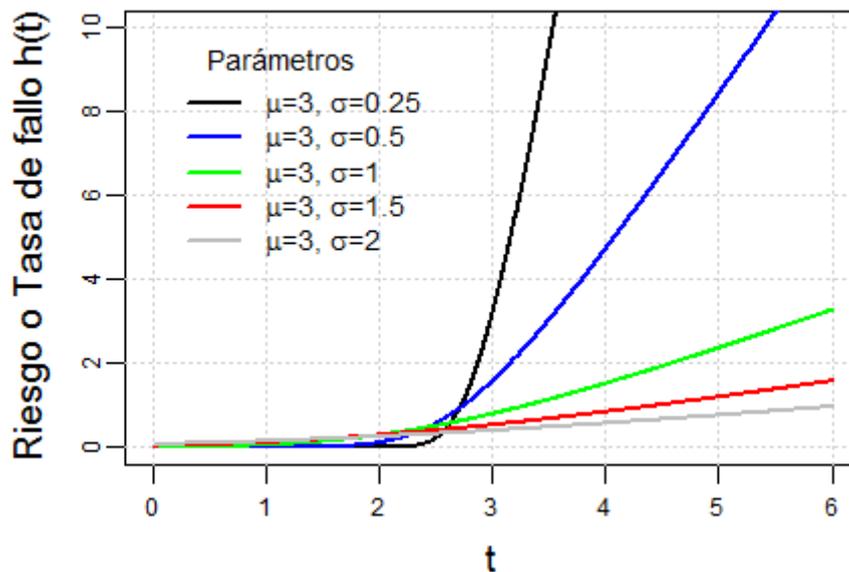
$$\text{Erfc}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} e^{-t^2} dt$$

```
# función de riesgo o tasa de fallo h(t)=f(t)/R(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
mean <- c(3, 3, 3, 3, 3)
sd <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=0.25")), expression(paste(, mu,
"=3, ", sigma,"=0.5")), expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1")),
expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1.5")), expression(paste(, mu, "=3, ",
sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,10),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo o Tasa de fallo h(t)", cex.lab
= 1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
```

```

grid()
for (i in 1:5){
lines(x,(dnorm(x, mean[i], sd[i], log=FALSE))/(pnorm(x,mean[i], sd[i],
lower=FALSE,log=FALSE)), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.1.5 La Función de Riesgo Acumulada $H(t)$

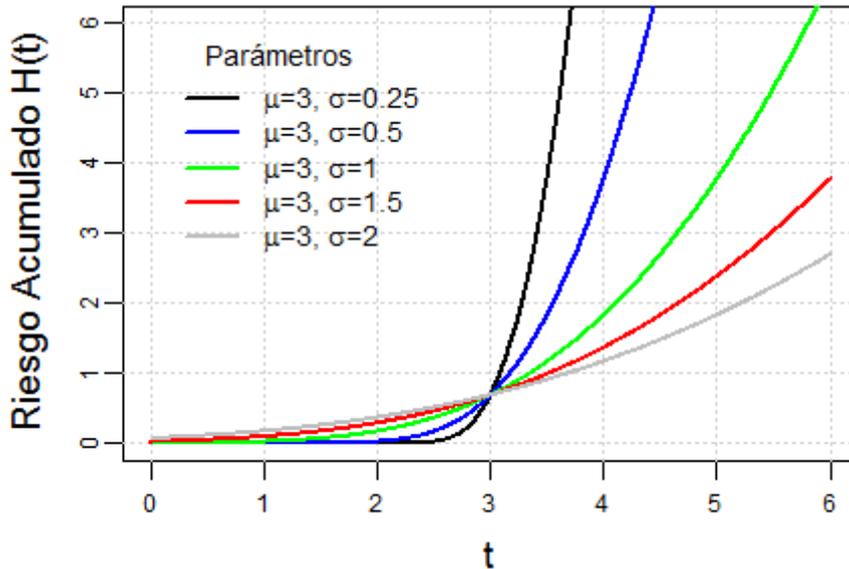
Está representada en la figura, sigue un patrón similar al descrito en la función de riesgo como puede observarse en la figura.

```

#
# función de riesgo acumulado H(t)=-log(1-F(t))
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
mean <- c(3, 3, 3, 3, 3)
sd <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=0.25")), expression(paste(, mu,
"=3, ", sigma,"=0.5")), expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1")),
expression(paste(, mu, "=3, ", sigma,"=1.5")), expression(paste(, mu, "=3, ",
sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,6),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo Acumulado H(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()

```

```
for (i in 1:5){
lines(x,-pnorm(x, mean[i], sd[i],lower=FALSE,log=TRUE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



La Media o Esperanza Matemática $\theta = E[T]$ del tiempo de fallo T vendría dada por:

$$E[t]=\mu$$

La Varianza $Var[T]$ sería

$$Var[T]=\sigma^2$$

3.2 Distribución Log-Normal

Este modelo de distribución se ha utilizado en multitud de aplicaciones asociadas a ingeniería, medicina. Se dirá que la variable aleatoria T sigue una distribución Log-Normal, y lo denotaremos como $LogN(\mu, \sigma)$, si la variable $Y = \log T$ sigue una Distribución Normal con media μ y desviación típica σ . Por lo tanto, sus funciones más significativas serían:

3.2.1 La Función de Densidad $f(t)$

De una variable aleatoria Y para una Distribución Normal estaría representa por:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

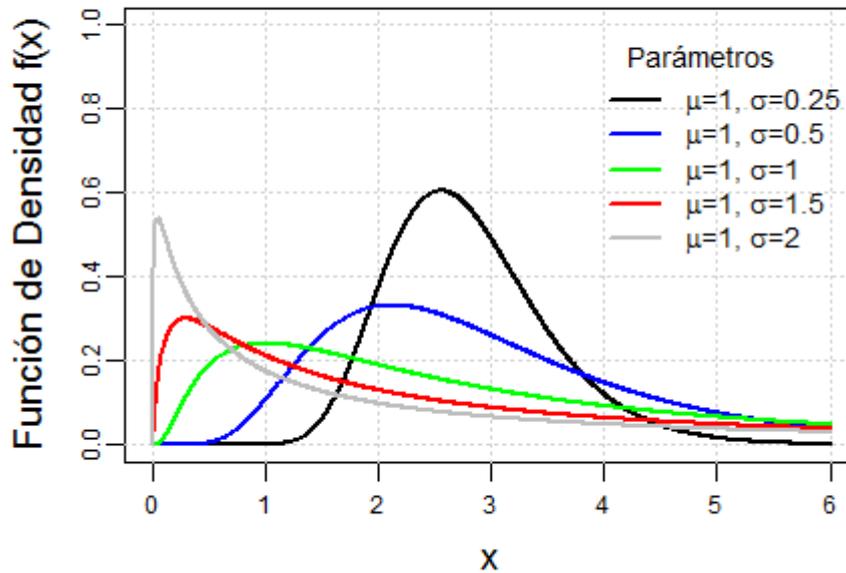
con $y \in \mathbb{R}$, entonces la Función de Densidad $f(t)$ de $T = \exp(Y)$, para la Distribución LogNormal sería:

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad t > 0$$

En la figura se representa la función de densidad para la distribución Log-Normal para

$\mu = 1$ y $\sigma = 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2$

```
#####
# Distribución Log-Normal #
#####
#
# función de densidad f(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
meanlog <- c(1, 1, 1, 1, 1)
sdlog <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors<- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.25")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.5")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1.5")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,1),type="n",xlab="x", ylab="Densidad f(x)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,dlnorm(x, meanlog[i], sdlog[i],log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05,title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



3.2.2 La Función de Distribución F(t)

se expresaría mediante

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$$

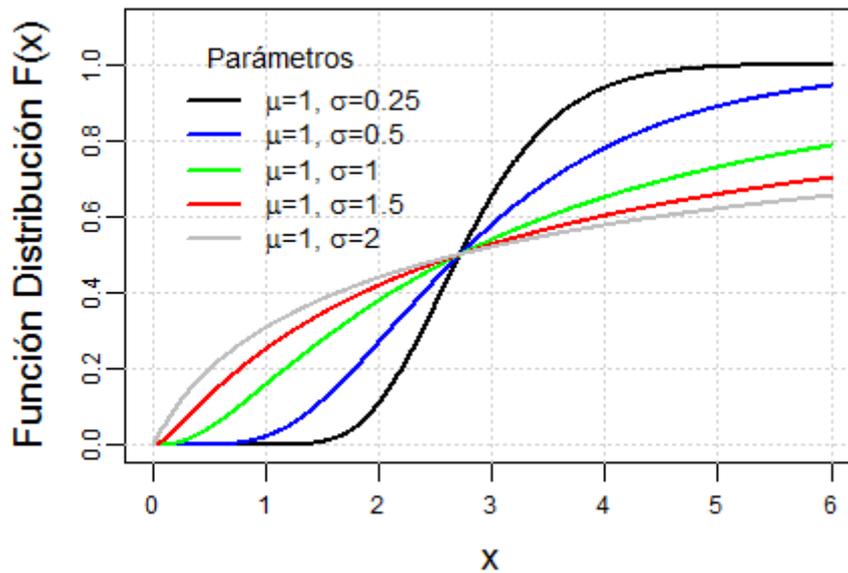
donde ϕ es la función de Distribución Normal Estándar indicada en el apartado anterior. La función de distribución está representada en la figura, teniendo cierta similitud a la función de densidad de la distribución normal

```
#
# función de distribución F(x)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
meanlog <- c(1, 1, 1, 1, 1)
sdlog <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.25")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.5")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1.5")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="x", ylab="Distribución F(x)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
```

```

cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,plnorm(x, meanlog[i], sdlog[i], lower=TRUE,log=FALSE), col =
colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.2.3 La Función de Fiabilidad R(t)

Decrece más suavemente a cero que la función de fiabilidad de la distribución normal

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)$$

```

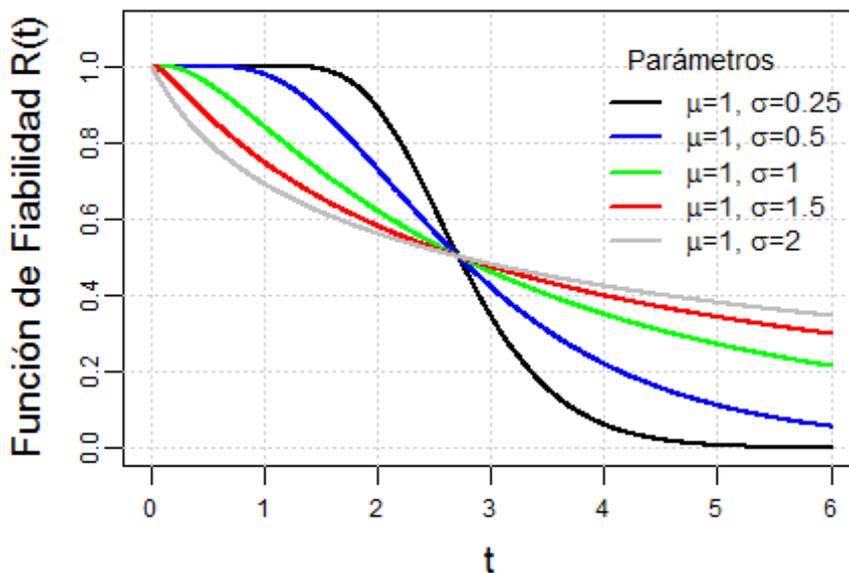
#
# función de Fiabilidad R(t)=1-F(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
meanlog <- c(1, 1, 1, 1, 1)
sdlog <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.25")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.5")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1")),
           expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1.5")),

```

```

expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=2"))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Función de Fiabilidad R(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,plnorm(x, meanlog[i], sdlog[i], lower=FALSE,log=FALSE), col =
  colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.2.4 La Función de Riesgo o Tasa de Fallo h(t)

Que se representa en la figura se caracteriza por valer cero en $t = 0$, y se puede observar, para el caso $\sigma = 2$, que la función crece hasta un máximo y a continuación decrece, acercándose a cero a medida que t tiende a ∞ .

$$h(t) = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma}\right)^2\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{t \cdot \sigma \cdot \operatorname{Erfc}\left(-\frac{\mu - \ln t}{\sigma\sqrt{2}}\right)}$$

```

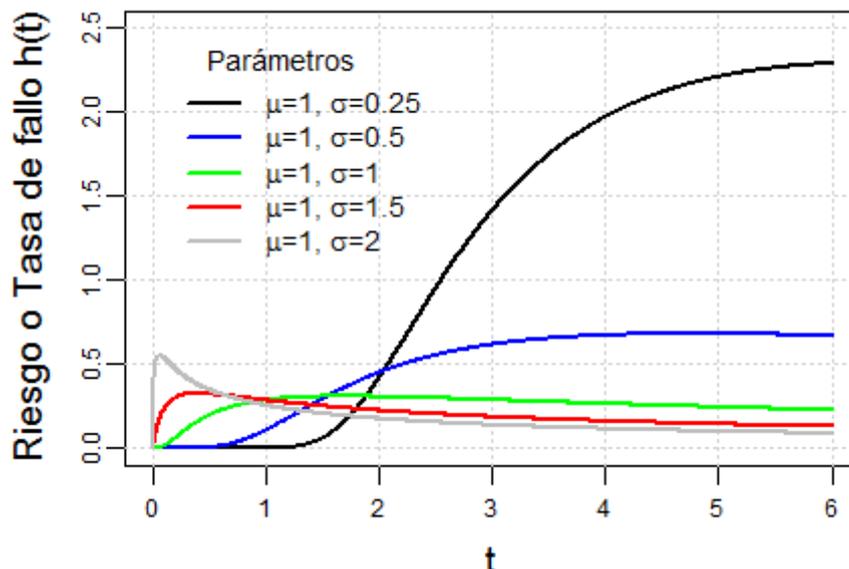
#
# función de riesgo o tasa de fallo h(t)=f(t)/R(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))

```

```

x <- seq(0,6,len=1000)
meanlog <- c(1, 1, 1, 1, 1)
sdlog <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.25")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.5")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1.5")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,2.5),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo o Tasa de fallo h(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,(dlnorm(x, meanlog[i], sdlog[i], log=FALSE))/(plnorm(x,meanlog[i],
sdlog[i],
lower=FALSE,log=FALSE))), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")

```



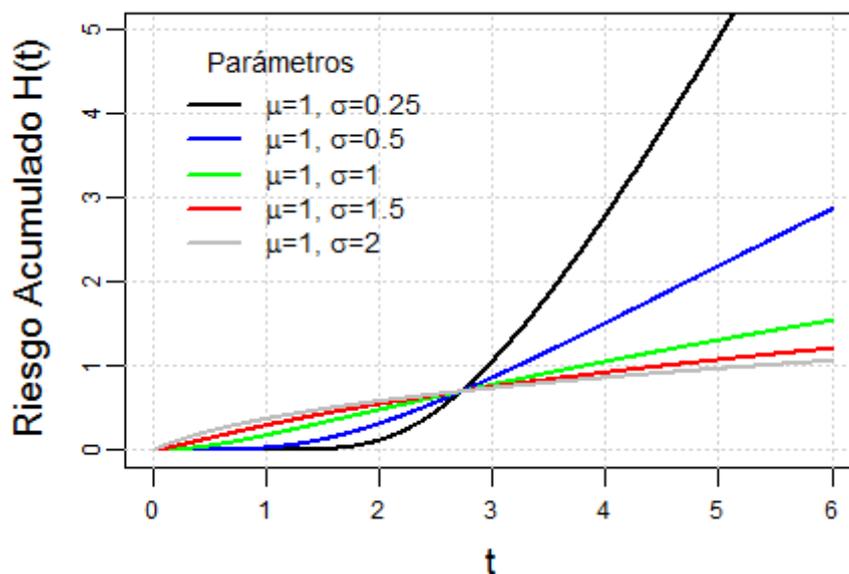
3.2.5 La Función de Riesgo Acumulado H(t)

Sigue un patrón similar al descrito en la función de riesgo acumulada de la distribución normal,

```

#
# función de riesgo acumulado H(t)=-log(1-F(t))
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
meanlog <- c(1, 1, 1, 1, 1)
sdlog <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.25")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=0.5")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=1.5")),
            expression(paste(, mu, "=1, ", sigma,"=2")))
plot(range(x),c(0,5),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo Acumulado H(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,-plnorm(x, meanlog[i], sdlog[i],lower=FALSE,log=TRUE), col =
colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")

```



La Media o Esperanza Matemática $\theta = E[T]$ del tiempo de fallo T vendrá dada por:

$$E[T] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

La Varianza $Var[T]$ sería:

$$Var[T] = e^{2\mu + \sigma^2} (-1 + e^{\sigma^2})$$

3.3 Distribución Exponencial

Históricamente, este modelo de distribución fue muy utilizado en el trabajo con tiempos de vida útil, debido a la simplicidad de los métodos estadísticos que proporciona. Sin embargo, la aplicabilidad práctica de la distribución exponencial ha sido muy discutida. Para una distribución de fallo exponencial, un dispositivo ha de ser insensible a la edad y al uso. Cualquier acción que no llegue a producirle un fallo debe dejarle como estaba. Si no ha fallado, debe ser tan bueno como cuando estaba en su inicio de vida. Esta propiedad da lugar a que se denomine como una función sin memoria.

Las funciones básicas de esta distribución serían las siguientes.

3.3.1 La Función de Densidad $f(t)$

de una variable aleatoria T con distribución exponencial sería

$$f(t) = \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} \quad t \geq 0$$

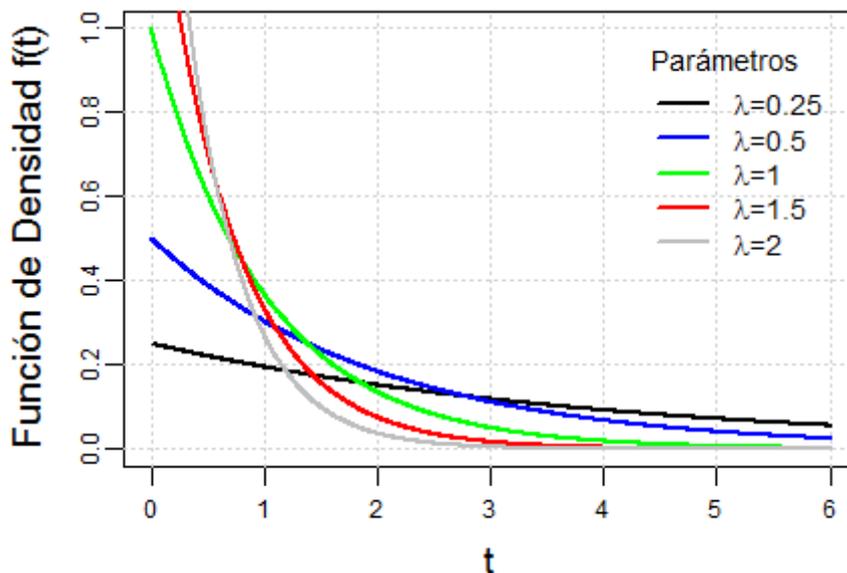
Es una función decreciente y tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede observar en la figura, siendo $\eta > 0$ el parámetro de escala del modelo y cuando η es igual a 1, se le denomina distribución exponencial estándar

```
#####
# Distribución Exponencial
#####
#
# función de densidad f(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
rate <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
```

```

labels <-c(expression(paste(, lambda, "=0.25")), expression(paste(, lambda, "=0.5")),
expression(paste(, lambda, "=1")), expression(paste(, lambda, "=1.5")),
expression(paste(, lambda, "=2")))
plot(range(x),c(0,1),type="n",xlab="t", ylab="Densidad f(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,dexp(x, rate[i],log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")

```



3.3.2 La Función de Distribución F(t)

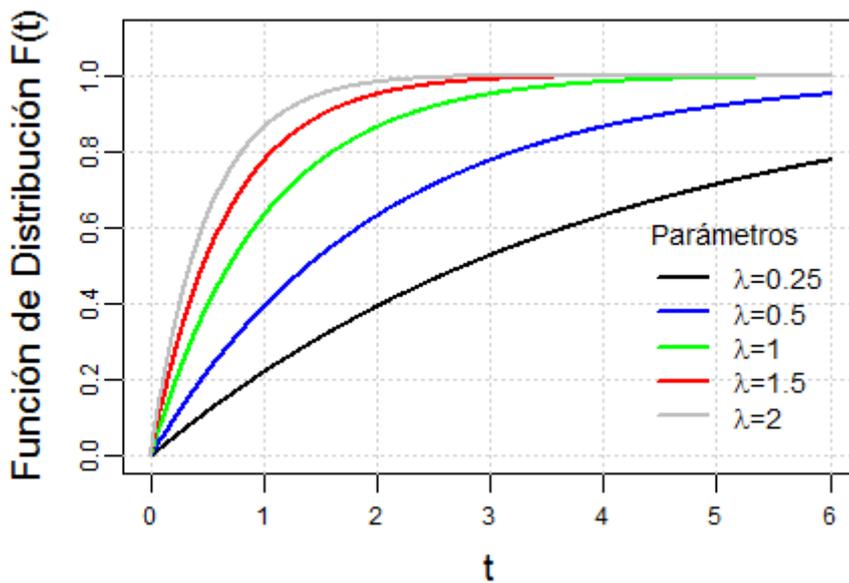
quedaría expresada por

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = \int_0^t \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} dt = e^{-\frac{t}{\eta}} \Big|_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{\eta}} \quad t \geq 0$$

y su representación gráfica se indica en la figura. Es una función creciente y tiende a 1 cuando $t \rightarrow \infty$

#

```
# función de distribución F(t) par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2)) x <-
seq(0,6,len=1000)
rate <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, lambda, "=0.25")), expression(paste(, lambda, "=0.5")),
expression(paste(, lambda, "=1")), expression(paste(, lambda, "=1.5")),
expression(paste(, lambda, "=2")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Distribución F(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,pexp(x, rate[i], lower=TRUE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("bottomright", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



3.3.3 La Función de Fiabilidad R(t)

es una función decreciente y tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, representándose en la figura.

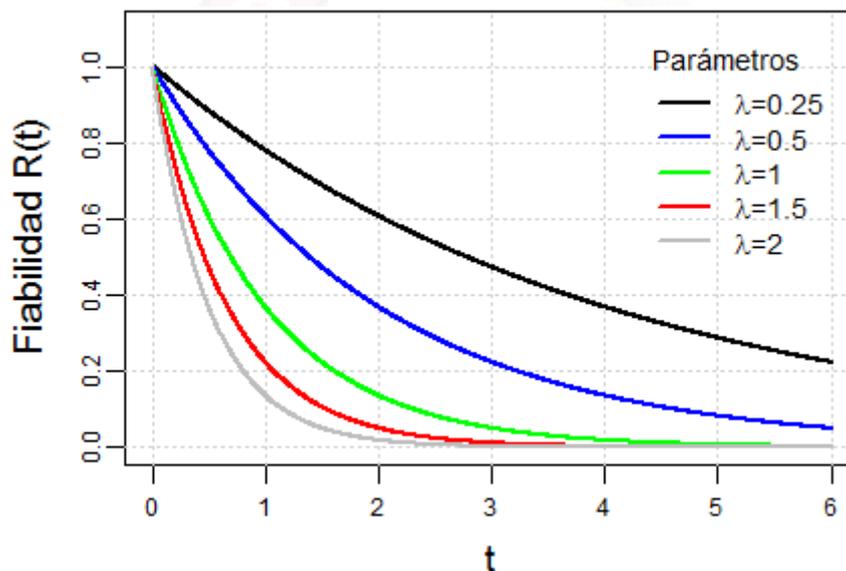
$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\frac{t}{\eta}} \quad t \geq 0$$

```
#
# función de Fiabilidad R(t)=1-F(t) par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2)) x <-
seq(0,6,len=1000)
```

```

rate <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste(, lambda, "=0.25")), expression(paste(, lambda, "=0.5")),
expression(paste(, lambda, "=1")), expression(paste(, lambda, "=1.5")),
expression(paste(, lambda, "=2")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Fiabilidad R(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,pexp(x, rate[i], lower=FALSE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title = "Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.3.4 La Función de Riesgo o Tasa de Fallo $h(t)$

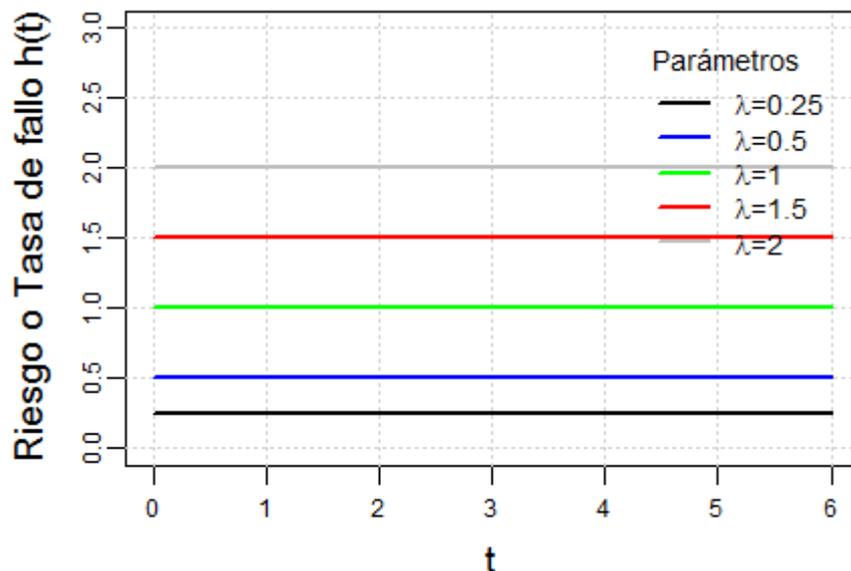
para un dispositivo sin taras iniciales y no afectado aun por el desgaste, sería correcto suponer en teoría que su tasa de fallo es constante. y su valor sería el inverso del parámetro de escala del modelo, η . Así se puede observar en la figura.

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}}}{e^{-\frac{t}{\eta}}} = \frac{1}{\eta}$$

```

#
# función de riesgo o tasa de fallo h(t)=f(t)/R(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
rate <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, lambda, "=0.25")), expression(paste(, lambda, "=0.5")),
expression(paste(, lambda, "=1")), expression(paste(, lambda, "=1.5")),
expression(paste(, lambda, "=2")))
plot(range(x),c(0,3),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo o Tasa de fallo h(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,(dexp(x, rate[i], log=FALSE))/(pexp(x, rate[i], lower=FALSE,log=FALSE)), col
=
colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.3.5 La Función de Riesgo Acumulado H(t)

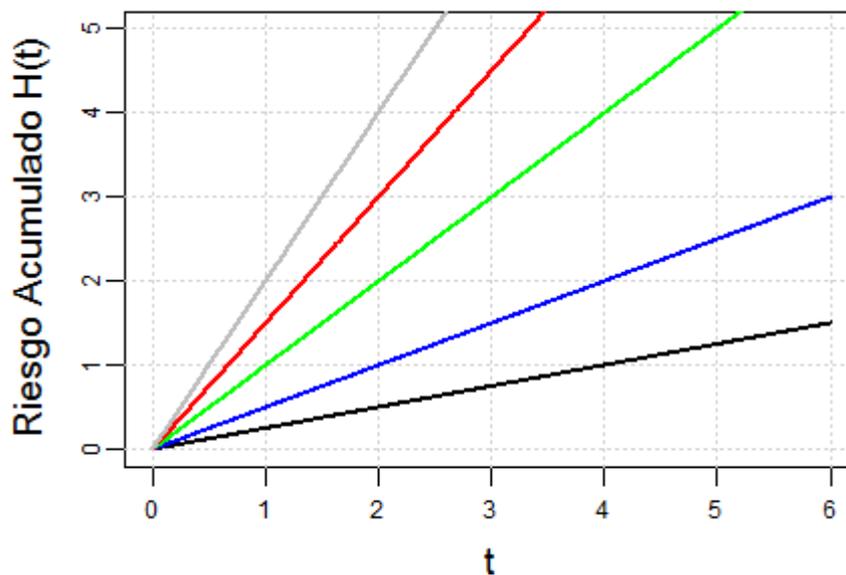
siguen un patrón similar con pendiente diferente y es inversamente proporcional al valor del parámetro de escala η , según se observa la figura.

```
#
```

```

# función de riesgo acumulado H(t)=-log(1-F(t))
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,6,len=1000)
rate <- c(0.25, 0.5, 1, 1.5, 2)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, lambda, "=0.25")), expression(paste(, lambda, "=0.5")),
expression(paste(, lambda, "=1")), expression(paste(, lambda, "=1.5")),
expression(paste(, lambda, "=2")))
plot(range(x),c(0,5),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo Acumulado H(t)", cex.lab =
1.2,cex.main=1,
cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
lines(x,-pexp(x, rate[i],lower=FALSE,log=TRUE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



La Media o Esperanza Matemática $\theta = E[T]$ del tiempo de fallo T de esta distribución vendría indicado por:

$$\theta = E[T] = MTBF = MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} dt = \eta$$

donde

MTBF: Tiempo medio entre fallos en sistemas reparables.

MTTF: Tiempo medio hasta el fallo en sistemas no reparables

La Varianza $\text{Var}[T]$ se expresaría mediante:

$$\text{Var}[T] = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \frac{1}{\eta} e^{-\frac{t}{\eta}} dt = \eta^2$$

Se suele aplicar esta la distribución en las siguientes situaciones:

- En componentes de vida útil muy larga, que excede la vida de servicio de los sistemas de los que forman parte. Es el caso de componentes electrónicos.
- En componentes que se sustituyen preventivamente antes de que llegue el desgaste.
- En sistemas en serie compuestos de bloques exponenciales y, en la práctica, en sistemas reparables muy complejos en los que no haya redundancias dominantes.

Es evidente que en los dos primeros casos, no es en rigor la vida media θ , pues sólo se tiene en cuenta la parte central de la curva de la bañera. Por ello, el parámetro θ , tratándose de componentes sujetos a desgaste, aunque empleados sólo durante su vida útil, es una "vida media ficticia".

En el caso de sistemas que fallan exponencialmente, se reparan y siguen funcionando, θ es el tiempo medio entre fallos (MTBF). Evidentemente, los sistemas reparables tienen una nueva vida después de cada reparación. La distribución de fallos, en general, puede variar a cada fallo, por desgaste de los componentes que no han fallado y siguen en el sistema.

En el caso de sistemas de distribución de fallo exponencial y no reparables, θ sería el tiempo medio que transcurre hasta el fallo (MTTF).

No obstante, para los sistemas citados en el tercer apartado, las sucesivas distribuciones son rigurosas o aproximadamente iguales, conservando el mismo valor de θ .

3.4 Distribución Weibull

La distribución de Weibull ayuda a conocer la causa raíz de un fallo, pronosticar la cantidad de fallos y por tanto la Fiabilidad de un equipo. Es una distribución utilizada con asiduidad como modelo preferido de ajuste de datos a una distribución de frecuencias cuando no hay normalidad. Esta distribución es triparamétrica (β, η, γ) , es decir, se define mediante tres parámetros y es quizá el modelo más utilizado para tratar problemas con tiempos de vida en fiabilidad industrial.

En la literatura técnica está muy extendida la utilización de la distribución de Weibull biparamétrica (β, η) , debido a que, el tercer parámetro es el parámetro de localización y se hace $\gamma = 0$, es decir, el parámetro que localiza la abscisa a partir del cual se inicia la distribución. Trabajando de forma biparamétrica se ha de asumir el error de falta de localización.

Las funciones principales de esta distribución serían indicadas a continuación:

3.4.1 La Función de Densidad $f(t)$

de una variable aleatoria continua T estaría indicada por

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad t \geq 0$$

siendo

γ = parámetro de origen (sólo se considera $t \geq \gamma$).

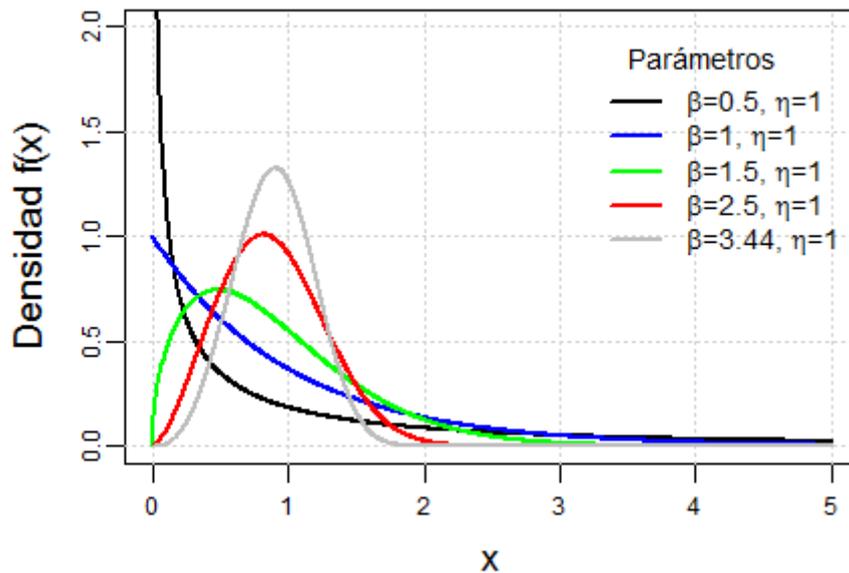
β = parámetro de forma.

$\eta = 1/\lambda$ = parámetro de escala o característica de vida.

y su representación gráfica se muestra en la figura para $\gamma = 0$, $\beta = 0.5, 1, 1.5, 2.5$ y 3.44 y $\eta = 1$.

```
#
#####
# Distribución Weibull #
#####
#
# Scale(eta) = 1/lambda
#
# función de densidad f(x)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=1, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,2),type="n",xlab="x", ylab="Densidad f(x)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,dweibull(x,shape[i], scale[i],log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
```

#



3.4.2 La Función de Distribución F(t)

estaría indicada mediante la expresión

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad t \geq 0$$

y su representación gráfica se indica en la figura. Siendo esta una función creciente y tiende a 1 cuando $t \rightarrow \infty$

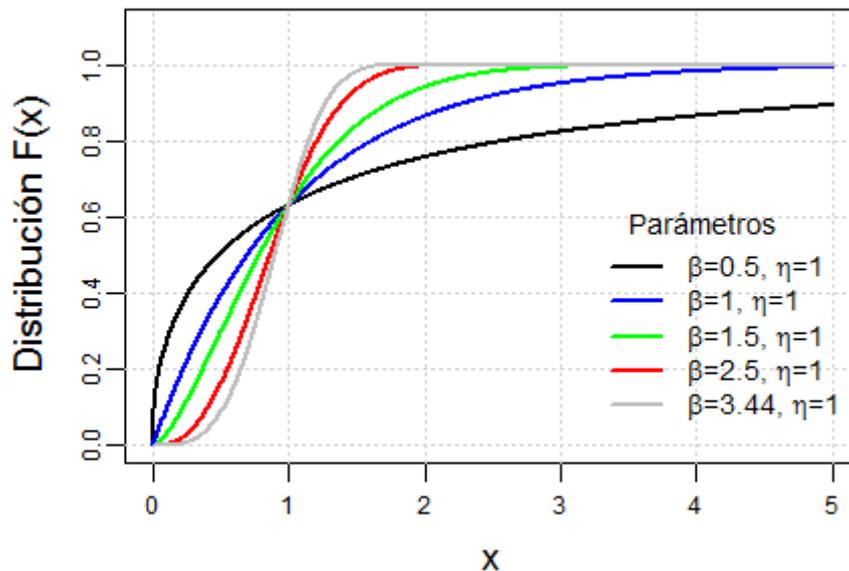
#

```
# función de distribución F(x)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=1, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="x", ylab="Distribución F(x)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
```

```

lines(x,pweibull(x,shape[i], scale[i], lower=TRUE,log=FALSE), col =
colors[i],lwd=2)
}
legend("bottomright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.4.3 La Función de Fiabilidad $R(t)$

es una función decreciente y tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, según se indica en la figura.

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad t \geq 0$$

```

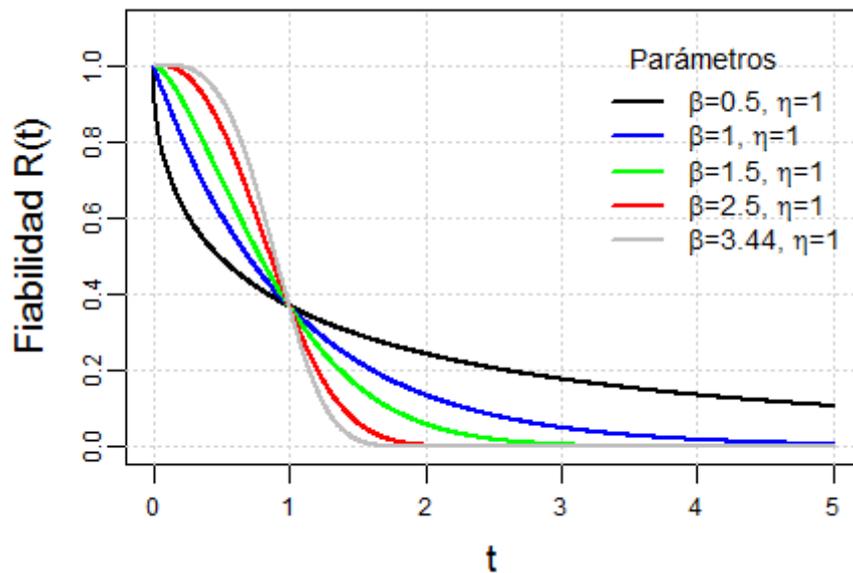
#
# función de Fiabilidad R(t)=1-F(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=1, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta,"=1")),
           expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Fiabilidad R(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,

```

```

cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,pweibull(x,shape[i], scale[i], lower=FALSE,log=FALSE), col =
colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.4.4 La Función de Riesgo o Tasa de Fallo h(t)

Está muy afectada por la variación de la forma β dando lugar a graficas diferentes como se muestran en la figura.

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad t \geq 0$$

```

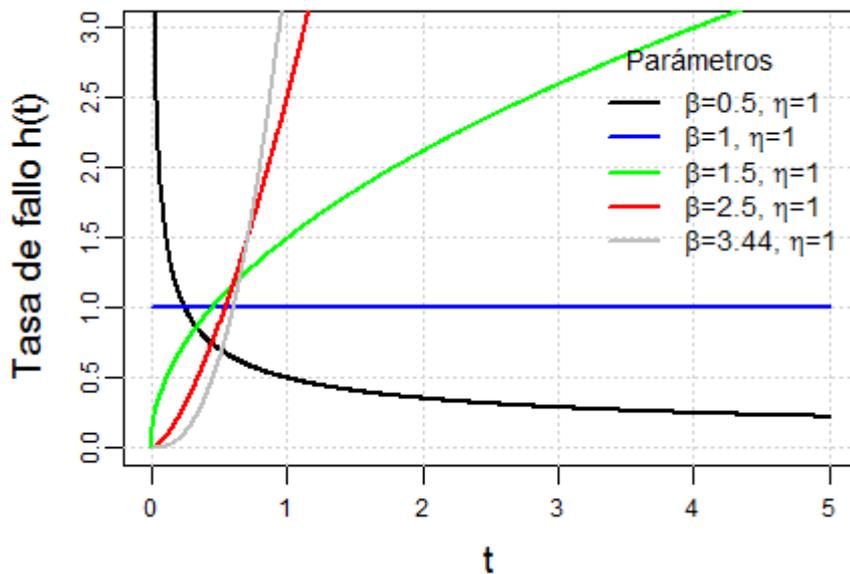
#
# función de riesgo o tasa de fallo h(t)=f(t)/R(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta,"=1))),

```

```

expression(paste(, beta, "=1, ", eta,"=1")),
expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta,"=1")),
expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta,"=1")),
expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta,"=1"))
plot(range(x),c(0,3),type="n",xlab="t", ylab="Tasa de fallo h(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,(dweibull(x,shape[i], scale[i], log=FALSE))/(pweibull(x,shape[i], scale[i],
lower=FALSE,log=FALSE)), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



Si consideramos que $\gamma = 0$ (es decir, hay posibilidad de fallo desde $t = 0$), y para el valor particular $\eta = 1$, presenta tasas de fallos crecientes, decrecientes o constantes:

- $0 < \beta < 1$. La función de riesgo es decreciente, es decir, la tasa de fallo disminuye al aumentar el tiempo (período infantil).
- $\beta = 1$. La función de riesgo es constante e igual a $1/\eta$, por lo que no depende del tiempo. La distribución, en ausencia de parámetro de origen, es exactamente la exponencial de media η .
- $\beta > 1$. La función de riesgo es creciente, describiendo bien el período de desgaste, o $0 < \beta \leq 4$. Período de desgaste tempranos,

- ✓ $1 < \beta < 2$. La función de riesgo crece rápidamente en el origen y muy poco a medida que t crece. Fallos en piezas mecánicas (rodamientos).
- ✓ $\beta = 2$ el riesgo crece linealmente con el tiempo. La distribución Weibull se aproxima a distribución de Rayleigh.
- ✓ $2 < \beta < 4$. Crece poco con t próximo a cero y después rápidamente.
 - Fatiga de piezas de baja frecuencia ($\beta = 2.5$ a 4).
 - Fallos en correas ($\beta = 2.5$).
 - Fallos por corrosión y erosión ($\beta = 3$ a 4).
 - Para $\beta = 3.44$, la distribución Weibull se aproxima a distribución Normal.
- ✓ $\beta > 4$. Envejecimiento operacional. Corrosión por esfuerzos. Pérdida de propiedades de los materiales. Algunos tipos de erosión.

3.4.5 La Función de Riesgo Acumulado $H(t)$

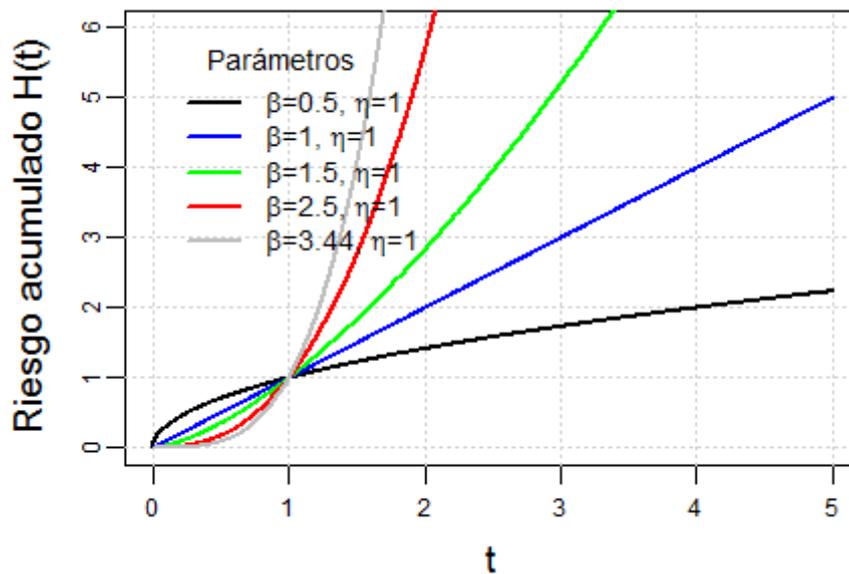
sigue un patrón único con relación directa del valor de β , según se aprecia en la figura.

$$H(t) = \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \quad t \geq 0$$

```
#
# función de riesgo acumulado H(t)=-log(1-F(t))
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=1, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,6),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo acumulado H(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,-pweibull(x,shape[i], scale[i],lower=FALSE,log=TRUE), col =
  colors[i],lwd=2)
}
```

```

legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
    
```



La Media o Esperanza Matemática $\theta = E[T]$ del tiempo de fallo T de esta distribución vendrá dada por:

$$E[T] = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Donde $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ es la función Gamma $\Gamma(x)$, para $x = 1 + \frac{1}{\beta}$

La Varianza $Var[T]$ sería

$$Var[T] = \eta^2 \left[-\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 + \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \right]$$

El Parámetro de escala o característica de vida $\eta = 1/\lambda$ es aproximadamente el percentil 63.2 % y se interpreta como el valor de la variable del tiempo de vida en el que han fallado el 63.2 % de las unidades. Este 63,2% sería:

$$F(t = \eta, \beta, \gamma = 0) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} = 1 - e^{-(1)^\beta} = 1 - \frac{1}{e^1} = 0.632 = 63.2\%$$

3.5 Distribución de Gamma

La distribución gamma tiene propiedades muy parecidas a las de la distribución Weibull, pero esta no es matemáticamente fácil de tratar. Es una distribución adecuada para modelizar el comportamiento de variables aleatorias continuas con asimetría positiva. Es decir, variables que presentan una mayor densidad de sucesos a la izquierda de la media que a la derecha.

En su expresión se encuentran dos parámetros, siempre positivos, β y η de los que depende su forma y alcance por la derecha, y también la función Gamma $\Gamma(\beta)$, responsable de la convergencia de la distribución.

El primer parámetro β sitúa la máxima intensidad de probabilidad y por este motivo se denomina la forma de la distribución: cuando se toman valores próximos a cero aparece entonces un dibujo muy similar al de la distribución exponencial. Cuando se toman valores más elevados de β el centro de la distribución se desplaza a la derecha y va apareciendo la forma de una campana de Gauss con asimetría positiva.

Es el segundo parámetro η el que determina el alcance de esta asimetría positiva desplazando la densidad de probabilidad en la cola de la derecha. Para valores elevados de η la distribución acumula más densidad de probabilidad en el extremo derecho de la cola, alargando mucho su dibujo y dispersando la probabilidad a lo largo del plano. Al dispersar la probabilidad la altura máxima de densidad de probabilidad se va reduciendo; de aquí que se le denomine escala. Valores más pequeños de η conducen a una figura más simétrica y concentrada, con un pico de densidad de probabilidad más elevado.

Las funciones más relevantes de esta distribución serían:

3.5.1 La Función de Densidad $f(t)$

de la distribución Gamma sería:

$$f(t) = \frac{1}{\eta^\beta \Gamma(\beta)} t^{\beta-1} e^{-\frac{t}{\eta}}$$

donde $t > 0$ y η, β son parámetros positivos de escala y forma respectivamente y $\Gamma(\beta)$ es la función gamma dada por

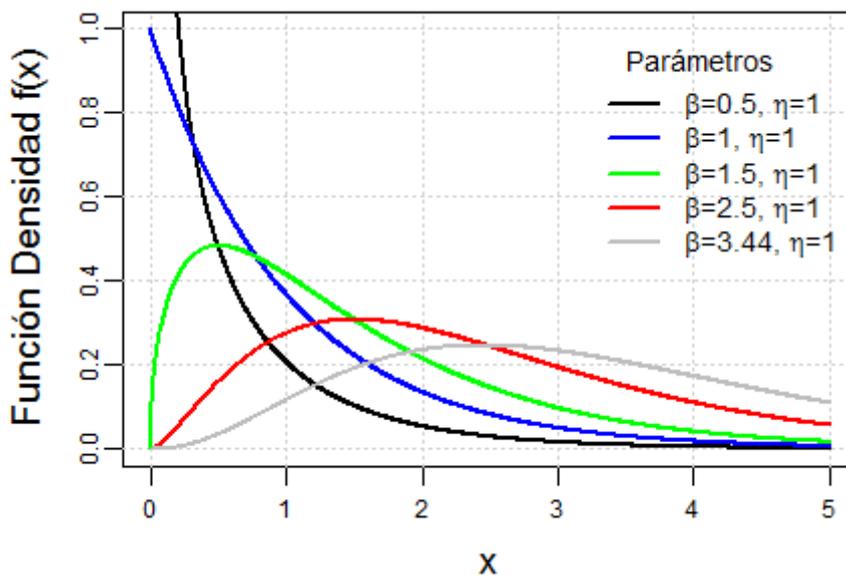
$$\Gamma(u) = \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-u} du$$

En la siguiente Figura se muestra la función de densidad. Al igual que la Weibull incluye el caso exponencial cuando $\beta = 1$, se aproxima a una distribución normal cuando $\beta \rightarrow \infty$.

```
#
#
#####
# Distribución Gamma #
#####
#
# función de densidad f(x)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
```

```

scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <-c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=1, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta,"=1")),
            expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,1),type="n",xlab="x", ylab="Función Densidad f(x)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,dgamma(x,shape[i], scale[i],log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title = "Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
    
```



3.5.2 La Función de Distribución F(t)

Estaría representada en la siguiente Figura e indicada por la siguiente expresión:

$$F(t) = \frac{1}{\eta^\beta \Gamma(\beta)} \int_0^t t^{\beta-1} e^{-\frac{t}{\eta}} dt$$

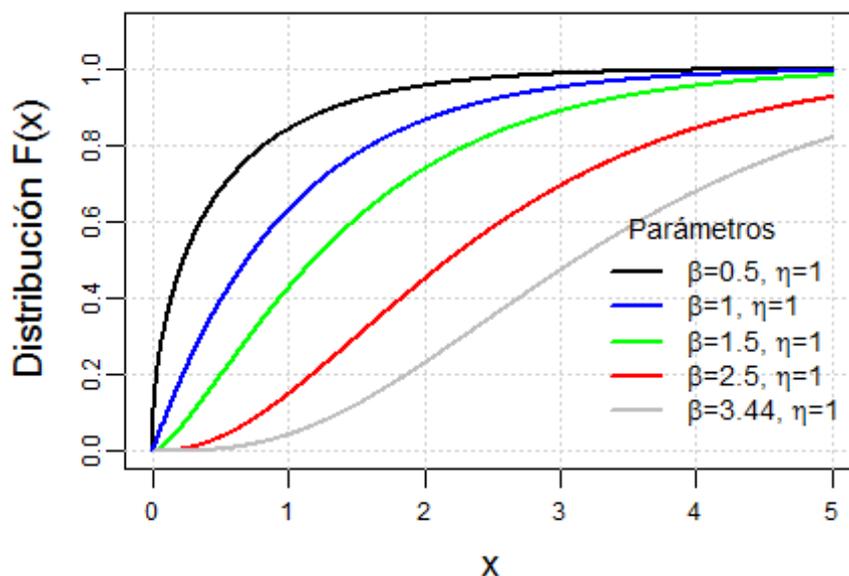
```

#
# función de distribución F(x)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
    
```

```

shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=1, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta, "=1")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="x", ylab="Distribución F(x)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,pgamma(x,shape[i], scale[i], lower=TRUE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("bottomright", inset=.05, title = "Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.5.3 La Función de Fiabilidad R(t)

de una distribución gamma estaría expresada como

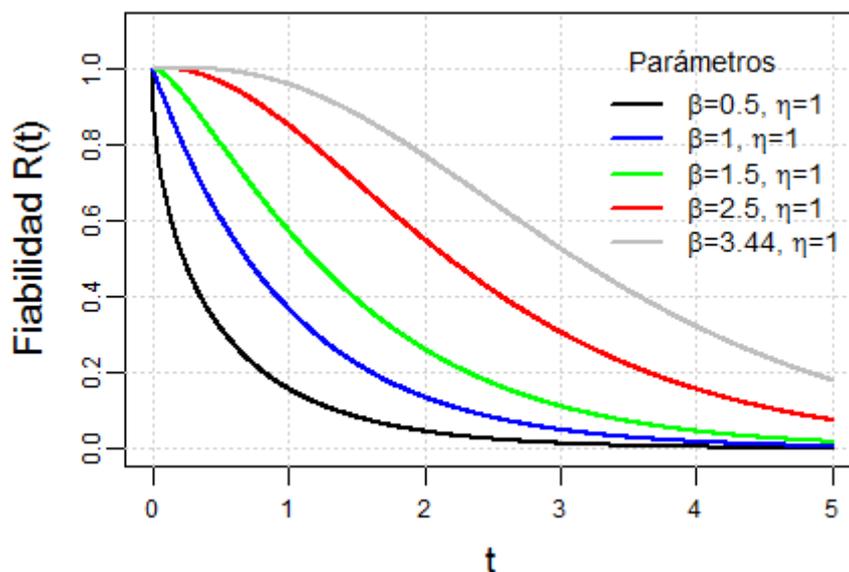
$$R(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^{\infty} \frac{1}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\eta}} dx = 1 - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{t/\eta} (u)^{\beta-1} e^{-u} dx = 1 - I\left(\frac{t}{\eta}, \beta\right)$$

donde I es la función gamma incompleta dada por

$$I(t, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (u)^{\beta-1} e^{-u} dx$$

y su representación gráfica se puede observar en la siguiente figura

```
#
# función de Fiabilidad R(t)=1-F(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste(beta, "=0.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(beta, "=1, ", eta, "=1")),
             expression(paste(beta, "=1.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(beta, "=2.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(beta, "=3.44, ", eta, "=1")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Fiabilidad R(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,pgamma(x,shape[i], scale[i], lower=FALSE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title = "Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```

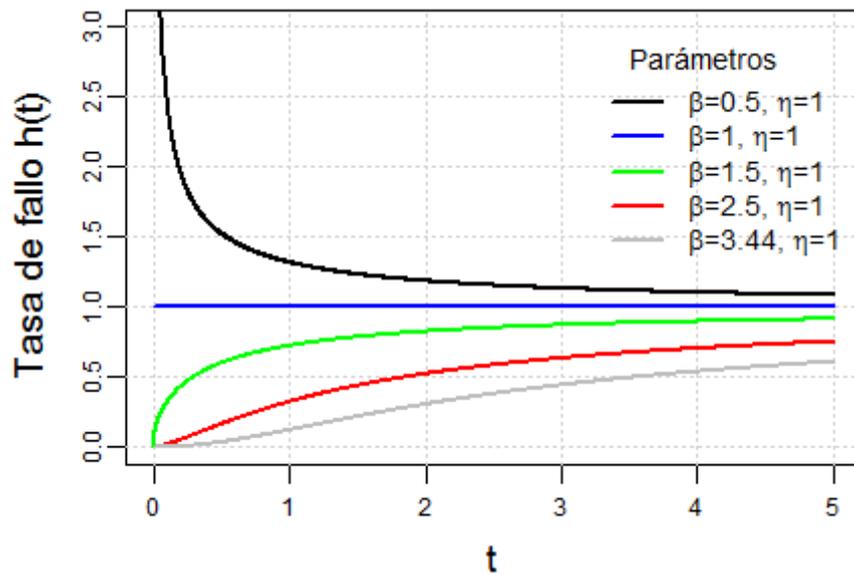


3.5.4 La Función de Riesgo o Tasa de Fallo $h(t)$

Es monótona creciente para $\beta > 1$, con $h(0) = 0$ y con $h(t) \rightarrow \eta$ cuando $t \rightarrow \infty$, y es monótona decreciente cuando $\beta < 1$, con $h(0) = \infty$ y $h(t) \rightarrow \eta$ cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede apreciar en la figura. Donde la expresión de esta función de riesgo estaría dada por:

$$h(t) = \frac{t^{\beta-1} e^{-\frac{t}{\eta}}}{\eta^{\beta} \Gamma(\beta) \left[1 - I\left(\frac{t}{\eta}, \beta\right) \right]}$$

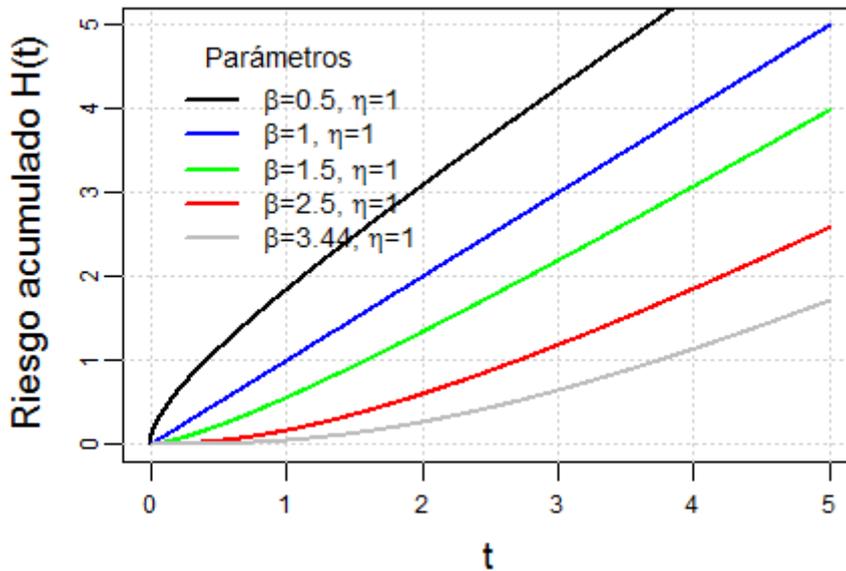
```
#
# función de riesgo o tasa de fallo h(t)=f(t)/R(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta, "=1")),
            expression(paste(, beta, "=1, ", eta, "=1")),
            expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta, "=1")),
            expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta, "=1")),
            expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta, "=1")))
plot(range(x),c(0,3),type="n",xlab="t", ylab="Tasa de fallo h(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,(dgamma(x,shape[i], scale[i], log=FALSE))/(pgamma(x,shape[i], scale[i],
                                                            lower=FALSE,log=FALSE)),
        col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



3.5.5 La Función de Riesgo Acumulado $H(t)$

Es una función creciente y tiende a ∞ cuando, $t \rightarrow \infty$ como se presenta en la siguiente figura.

```
#
# función de riesgo acumulado H(t)=-log(1-F(t))
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(0.5, 1, 1.5, 2.5, 3.44)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste(, beta, "=0.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=1, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=1.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=2.5, ", eta, "=1")),
             expression(paste(, beta, "=3.44, ", eta, "=1")))
plot(range(x),c(0,5),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo acumulado H(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,-pgamma(x,shape[i], scale[i],lower=FALSE,log=TRUE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



La Media o Esperanza Matemática $\theta = E[T]$ sería

$$E[T] = \beta\eta$$

La Varianza $Var[T]$ sería

$$Var[T] = \beta\eta^2$$

3.6 Distribución Erlang

La distribución Erlang se puede ver como un caso particular de la distribución gamma cuando $\beta = k$ con k entero. Por lo que este modelo hereda las propiedades ya mencionadas en el modelo gamma bajo las respectivas restricciones.

Un ejemplo sería de un dispositivo que está formado por k ($k \geq 1$) unidades idénticas, conectadas secuencialmente. Inicialmente solo la unidad 1 está operativa. Cuando la unidad 1 fallo la unidad 2 se conecta automáticamente, y así sucesivamente, hasta que la unidad k fallo.

Las funciones principales para esta aplicación serían expresadas de la siguiente forma:

3.6.1 La Función de Densidad $f(t)$

Se indica su representación gráfica en la siguiente figura.

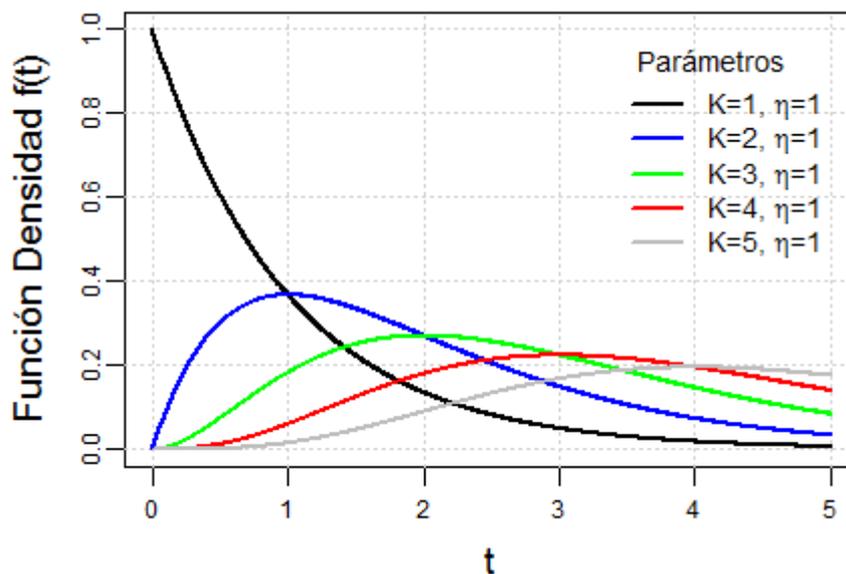
$$f(t) = \frac{1}{\eta^k \cdot (k-1)!} t^{k-1} e^{-\frac{t}{\eta}}$$

```
#
#####
# Distribución Erlang #
#####
#
```

```

# Beta = k con k siempre entero.
#
# función de densidad f(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(1, 2, 3, 4, 5)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste("K=1, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=2, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=3, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=4, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=5, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,1),type="n",xlab="t", ylab="Función Densidad f(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,dgamma(x,shape[i], scale[i],log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title = "Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")

```

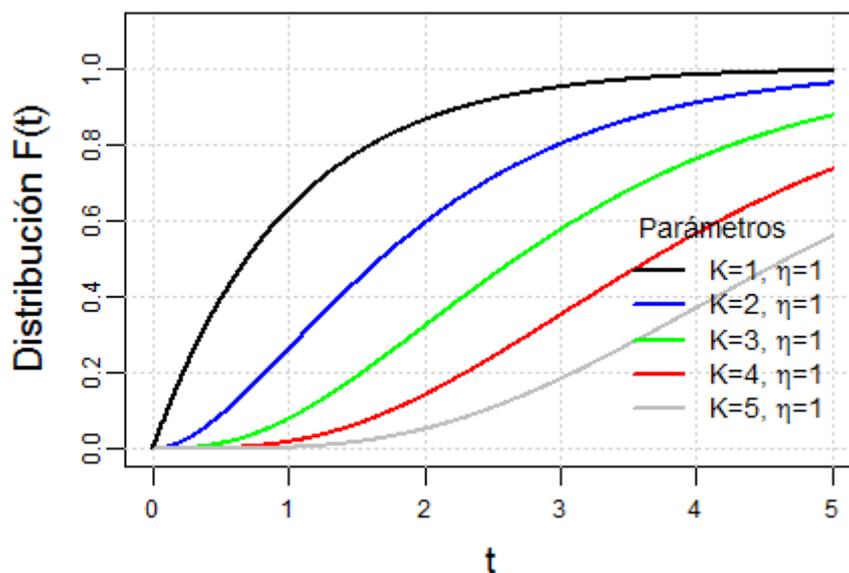


3.6.2 La Función de Distribución F(t)

Es una función creciente y tiende a 1 cuando $t \rightarrow \infty$, según se aprecia en la siguiente figura

$$F(t) = \frac{1}{\eta^k \cdot (k-1)!} \int_0^t x^{k-1} e^{-\frac{x}{\eta}} dx = 1 - e^{-\frac{t}{\eta}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{t^i}{\eta^i \cdot i!}$$

```
#
# función de distribución F(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(1, 2, 3, 4, 5)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste("K=1, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=2, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=3, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=4, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=5, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Distribución F(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,pgamma(x,shape[i], scale[i], lower=TRUE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("bottomright", inset=.05, title = "Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```

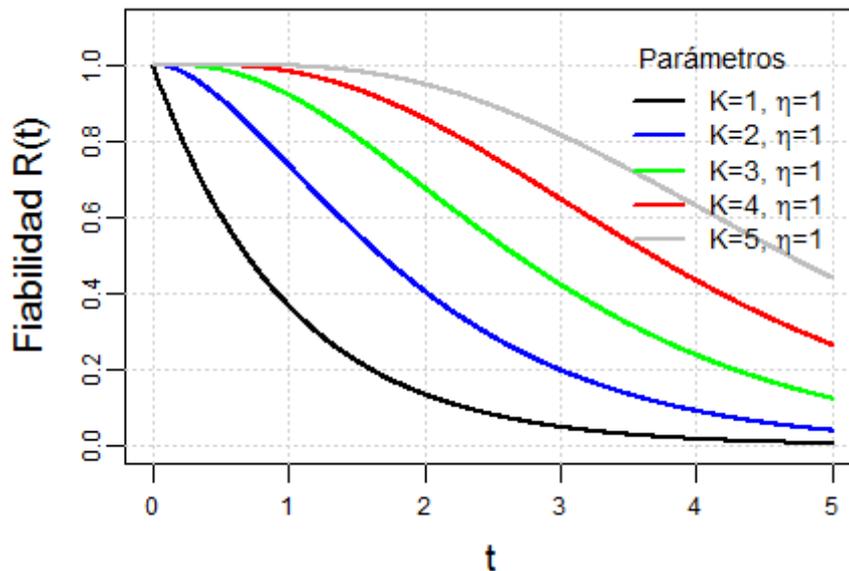


3.6.3 La Función de Fiabilidad R(t)

Es una función decreciente y tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, representándose en la siguiente figura.

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\eta}} \sum_{k=0}^{k-1} \frac{t^k}{\eta^k \cdot k!}$$

```
#
# función de Fiabilidad R(t)=1-F(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(1, 2, 3, 4, 5)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste("K=1, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=2, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=3, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=4, ", eta,"=1")),
             expression(paste("K=5, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,1.1),type="n",xlab="t", ylab="Fiabilidad R(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,pgamma(x,shape[i], scale[i], lower=FALSE,log=FALSE), col = colors[i],lwd=2)
}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
```



3.6.4 La Función de Riesgo o Tasa de Fallo h(t)

Es similar a la función gamma, pero solo se darán valores enteros de β como se aprecia en la siguiente figura:

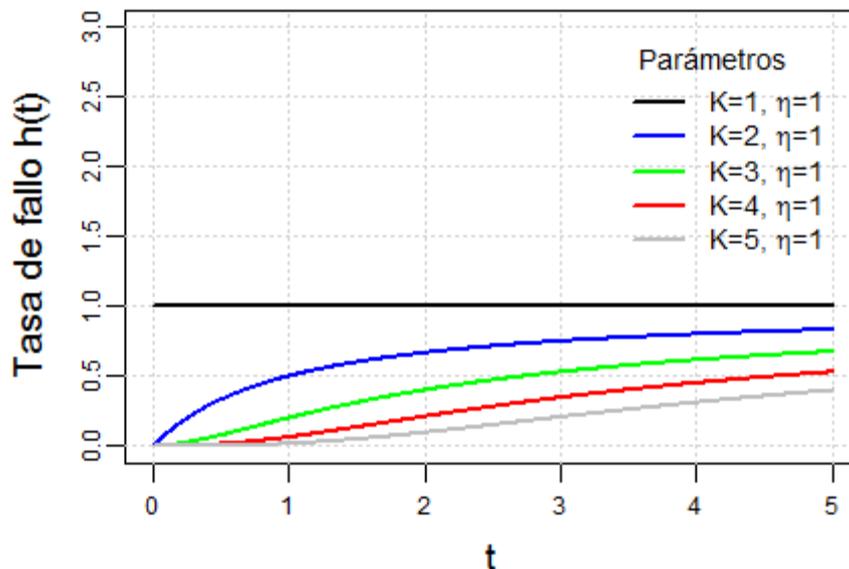
$$h(t) = \frac{t^{i-1}}{\eta^i} \left[(k-1)! \sum_{k=0}^{k-1} \frac{t^i}{\eta^i \cdot i!} \right]^{-1}$$

```
#
# función de riesgo o tasa de fallo h(t)=f(t)/R(t)
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(1, 2, 3, 4, 5)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste("K=1, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=2, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=3, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=4, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=5, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,3),type="n",xlab="t", ylab="Tasa de fallo h(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,(dgamma(x,shape[i], scale[i], log=FALSE))/(pgamma(x,shape[i], scale[i],
                                                             lower=FALSE,log=FALSE)),
        col = colors[i],lwd=2)
}
```

```

}
legend("topright", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#

```



3.6.5 La Función de Riesgo Acumulado $H(t)$

Es una función creciente y tiende a ∞ cuando, $t \rightarrow \infty$ como se presenta en la siguiente figura

```

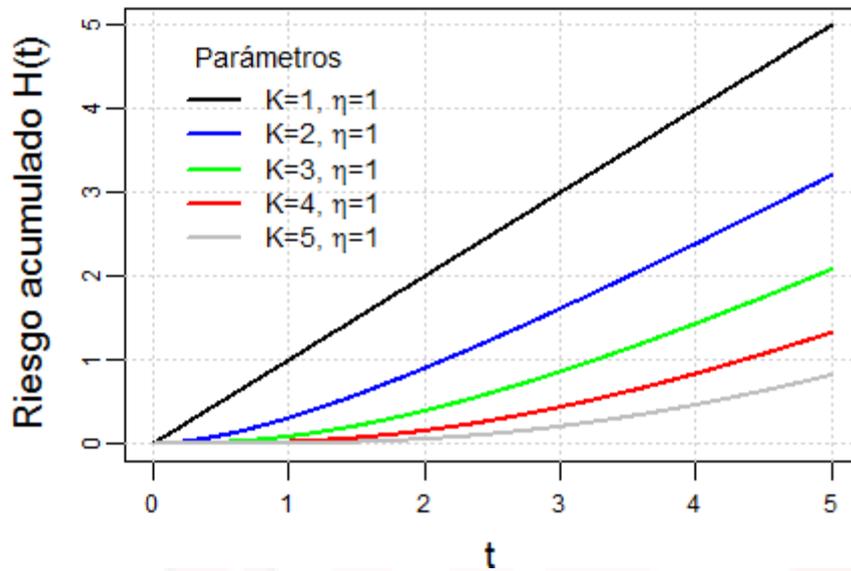
#
# función de riesgo acumulado H(t)=-log(1-F(t))
par(mgp =c(2,0.5,0), mar=c(4,4,3,2))
x <- seq(0,5,len=1000)
shape <- c(1, 2, 3, 4, 5)
scale <- c(1, 1, 1, 1, 1)
colors <- c("black", "blue", "green", "red", "grey")
labels <- c(expression(paste("K=1, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=2, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=3, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=4, ", eta,"=1")),
            expression(paste("K=5, ", eta,"=1")))
plot(range(x),c(0,5),type="n",xlab="t", ylab="Riesgo acumulado H(t)",
      cex.lab = 1.2,cex.main=1,
      cex.axis = 0.75)
grid()
for (i in 1:5){
  lines(x,-pgamma(x,shape[i], scale[i],lower=FALSE,log=TRUE), col = colors[i],lwd=2)
}

```

```

}
legend("topleft", inset=.05, title ="Parámetros",
      labels, lwd=2, lty=c(1, 1, 1, 1, 1), cex =0.9, col=colors, bty="n")
#
#

```



La Media o Esperanza Matemática $\theta = E[T]$ del tiempo de fallo T vendrá dada por:

$$E [T] = k\eta$$

La Varianza $Var[T]$ sería:

$$Var[T] = k\eta^2$$

4. Mantenibilidad

La mantenibilidad es una medida importante de la confiabilidad para todos los tipos de sistemas reparables y refleja la capacidad del sistema para ser mantenido en, o devuelto a, un estado en el que pueda realizar la función requerida. Como ejemplos, se pueden citar las actualizaciones a mitad de vida de los proyectos software para corregir niveles bajos de la disponibilidad obtenida o sistemas remotos que son difíciles de mantener. Además, para otros sistemas, la mantenibilidad, si se especifica incorrectamente, puede tener un efecto significativo en la confiabilidad conseguida, especialmente en sistemas sin redundancias. Un tratamiento general de la mantenibilidad se muestra en la Norma IEC 60300-3-10.

Una medida de la mantenibilidad es el MTRR (Mean Time To Repair) o como se conoce en castellano "Tiempo Medio de Reparación".

Se dirá que un sistema es "Altamente mantenible" cuando el esfuerzo asociado a la restitución sea bajo. Sistemas poco mantenibles o de "Baja mantenibilidad" requieren de grandes esfuerzos para sostenerse o restituirse.

En los siguientes apartados se indican las características más utilizadas para la descripción cuantitativa de mantenimiento.

4.1 Función de mantenibilidad $M(t)$,

es la función de distribución de la variable aleatoria DMT (duración de la tarea de mantenimiento). Representa la probabilidad de que la tarea de mantenimiento considerada se realice satisfactoriamente en un tiempo especificado t (tiempo de ineptitud total dado), o antes:

$$M(t) = P(DMT \leq t) = \int_0^t m(t) dt$$

4.2 Función de no reparabilidad,

Se expresa matemáticamente por:

$$R_r(t) = 1 - M(t)$$

Esta función sería similar a la función de supervivencia evaluada a través de los tiempos de fallo pero ambas funciones se presentan con connotaciones opuestas. $R_r(t)$ se define como la probabilidad de que el sistema no haya sido reparado previamente, mientras que en supervivencia se define como la probabilidad de no haber fallado antes de un tiempo t . Con lo cual, el crecimiento de $R_r(t)$ conlleva implicaciones negativas en cuanto a la disponibilidad del sistema, mientras que el crecimiento de $R(t)$ sucede lo opuesto.

4.3 Función de densidad del tiempo de reparación,

Es una función de densidad de probabilidad y se expresa como:

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt}$$

Esta función tiene similares propiedades que la función de densidad del tiempo de fallos. Por tanto, permite el cálculo de la probabilidad de que una reparación dure en un cierto intervalo de tiempo mayor o menor que un tiempo fijado.

4.4 Tasa de reparación en el instante t,

Mide la probabilidad que un sistema sea reparado en el intervalo $[t, t + \Delta t]$. Conocer este parámetro resulta muy útil en mantenimiento, ya que su evolución determina la probabilidad de que la reparación sea completada en un instante dado.

La Tasa de Reparación $\mu(t)$ estaría definida mediante:

$$\mu(t) = \frac{m(t)}{1 - M(t)}$$

4.5 El tiempo empleado en mantenimiento DMTp,

Representa el tiempo empleado en terminar un porcentaje dado de las tareas de mantenimiento consideradas. El más utilizado es el tiempo DMT90, que representa la duración del tiempo de recuperación para el que el 90% de los trabajos de mantenimiento han finalizado. -

$$DMT_{90} = t \rightarrow M(t) = P(DMT \leq t) = \int_0^t m(t)dt = 0.9$$

La duración esperada del mantenimiento MDMT, representa la esperanza de la variable aleatoria DMT. Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$MDMT = E(DMT) = \int_0^t t \cdot m(t)dt$$

En la figura se representa la gráfica de una hipotética función de mantenibilidad

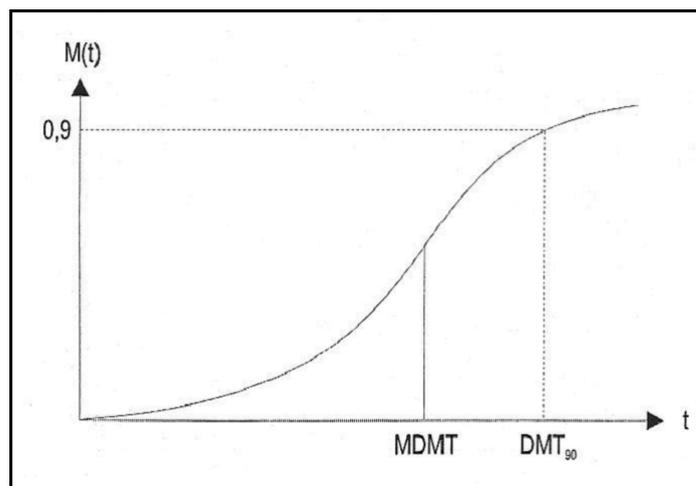


Figura Medidas de Mantenibilidad

5. Estimación de la Fiabilidad.

Lo que será expuesto a continuación es totalmente válido para el Mantenimiento, pero desde un punto de vista práctico se hará referencia principalmente a la Fiabilidad.

Dada la dependencia de la fiabilidad de los sistemas de la fiabilidad de sus componentes, los métodos estadísticos se centran en la estimación utilizando los datos obtenidos durante las pruebas de vida de éstos. Las pruebas pueden continuar hasta que todos los elementos de la muestra hayan fallado, o bien se pueden interrumpir, en este último caso se diría que el conjunto de datos obtenidos ha sido censurado.

Una vez que se dispone de los tiempos de fallos observados se convierten en el conjunto de datos al que se aplican métodos estadísticos para obtener estimaciones de fiabilidad mediante el ajuste de algún modelo estadístico. Si no se ha logrado identificar la distribución de los tiempos de fallo, se optará por un enfoque no paramétrico. Si, por el contrario, las observaciones se ajustan a alguna de las distribuciones teóricas conocidas, se optará por usar métodos paramétricos.

Los métodos no paramétricos tienden a ser más sencillos. Estos métodos son menos eficientes que los métodos paramétricos, pero resultan de gran utilidad cuando no se conoce ningún modelo paramétrico que se ajuste adecuadamente a los datos, se basa en la filosofía que algunos autores han llamado "dejar que los datos decidan por sí mismos". Estos proporcionan estimaciones puntuales de $R(t)$, $f(t)$ y $h(t)$ a partir de las observaciones obtenidas (sin poder suponer que éstas siguen una determinada distribución teórica). Este tipo de estudios, de gran aplicación en el contexto del análisis de supervivencia, no es de uso tan frecuente en el campo de la ingeniería de estimación de vida útil o tiempos de fallo.

Los métodos paramétricos son los más extendidos y las estimaciones que se obtienen apoyan unos análisis posteriores más detallados. Con mucha frecuencia, se han empleado para estimar funciones de fiabilidad y realizar contrastes de hipótesis sobre las mismas. En general estos modelos son usados en el análisis del tiempo de vida y en problemas relacionados con la modelización del envejecimiento y el proceso de fallo. El uso de métodos paramétricos requiere la elección de un estadístico de contraste adecuado. La utilización de ciertos estadísticos de contraste exige el cumplimiento de determinados requisitos, referidos a los parámetros y a la distribución poblacional. Estos requisitos son los denominados supuestos paramétricos, entre los que se suelen encontrar los siguientes:

- Las variables consideradas son cuantitativas continuas, medidas por lo menos en una escala de intervalos.
- Las muestras consideradas proceden de poblaciones en las que las variables se distribuyen según la ley normal. Si la distribución de la muestra se logra aproximar a alguna distribución teórica conocida, será posible usar la distribución teórica para proporcionar estimaciones de las funciones $R(t)$, $f(t)$ y $h(t)$.

- Se da homoscedasticidad (homogeneidad de varianzas) entre las distintas distribuciones comparadas, es decir, las muestras proceden de poblaciones con varianzas similares.
- Las muestras consideradas tienen un tamaño grande. Consideraremos grande, una muestra de tamaño superior a 30 individuos ($n > 30$).

La significación de los resultados que obtengamos dependerá del cumplimiento efectivo de tales condiciones.

Siempre que se cumplan los supuestos exigidos, las pruebas paramétricas resultan de mayor potencia que las no paramétricas, esto es, la probabilidad de rechazar una hipótesis nula efectivamente falsa es mayor. Teniendo esto en cuenta, el criterio que se ha de seguir de seguir a la hora de elegir entre pruebas paramétricas o no paramétricas es el de aplicar una del primer tipo siempre que las condiciones exigidas para ello se cumplan. Pero si no se cumplen tales condiciones, y especialmente si el tamaño muestral es muy pequeño, es preferible recurrir a las pruebas no paramétricas.

5.1 Características de los Datos.

Son múltiples las ocasiones en las que solo se tienen datos completos de la variable de interés T (tiempo de ocurrencia de un suceso, igualmente de interés) en una parte (que usualmente es pequeña) de las n unidades o unidades de la muestra que se desea analizar, mientras que del resto solamente se tiene información parcial o incompleta. Esta particularidad, es la que dificulta el análisis estadístico en los estudios de Fiabilidad y de Análisis de Supervivencia, pues se dice que buena parte de los datos de la muestra vienen con datos incompletos o censurados.

Las técnicas paramétricas tradicionales tienden a despreciar la información contenida en los datos censurados lo cual puede sesgar los resultados obtenidos. Es por ello, que los datos con censura se suelen asociar en mayor medida a los estudios de fiabilidad no paramétricos.

Las características particulares que usualmente se presentan en los datos serían la Censura y el Truncamiento.

5.1.1 Censura

Normalmente, los datos asociados a tiempos de vida presentan observaciones incompletas. La estimación de las características de la fiabilidad cambian respecto a la estimación clásica de muestras completas. Un fenómeno que produce datos incompletos es la censura.

Formalmente, se dice que una observación es censurada por la derecha de un valor C si el valor exacto de tal observación no es conocida pero sí se sabe que excede del tiempo C . Análogamente, una observación es censurada por la izquierda de C cuando sólo se sabe que el valor de la observación es menor que C . También puede aparecer la censura por intervalo, donde los datos censurados presentan censura por la derecha y por la izquierda. Es más común que aparezca la censura por la derecha que por la izquierda con datos asociados a tiempos de vida. Para poder hablar de censura se tendrá que tener en cuenta la forma en cómo se obtuvieron los datos. El problema fundamental es determinar la

distribución de la muestra y correspondiente función de verosimilitud de un proceso para así determinar los métodos estadísticos que derivan de ello.

5.1.1.1 Censura por la Derecha

5.1.1.1.1 Censura Tipo I

Inicialmente se ha de considerar la Censura Tipo I donde el evento es observado solamente si este ocurre antes de un tiempo predeterminado, independientemente del tamaño de la muestra. Un ejemplo de este tipo de censura se puede exhibir en un estudio de ciertos elementos que comienza con un número fijo de estos, a los cuales se les aplica uno o varios tratamientos, siendo la muerte de las unidades el evento de interés. Debido al tiempo o por las consideraciones de costes, el investigador tiene que terminar el estudio antes de que se presente el evento de interés en todas las unidades, sacrificando a las que no han fallecido. Los tiempos de vida o supervivencia registrados para las unidades que murieron durante el periodo de estudio son los tiempos desde el inicio del estudio hasta su muerte. Estos son llamados observaciones exactas o no censuradas. Los tiempos de supervivencia de las unidades sacrificados no son conocidos exactamente, pero son registrados como al menos la longitud del estudio. Estas son llamadas observaciones censuradas. Algunas unidades podrían perderse o morir accidentalmente y sus tiempos de supervivencia hasta el momento de perderse o morir, son también observaciones censuradas, pero no corresponderán a la Censura Tipo I.

En censura de este tipo es conveniente usar la siguiente notación cuando se observa a cada uno de los n individuos hasta un tiempo predeterminado $C > 0$, observando si los tiempos de vida t_i , con $i = 1, \dots, n$, asociados a cada individuo son mayores o menores que este valor C . Si $t_i > C$ estaremos en condiciones de saber que cada t_i es mayor que ese valor prefijado C pero no su valor exacto, por lo que diremos que éste es un dato censurado.

Estos datos pueden ser convenientemente representados por n pares de variables aleatorias (Z_i, Δ_i) , donde:

$$Z_i = \text{mín}(t_i, C)$$

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq C \\ 0 & \text{si } t_i > C \end{cases}$$

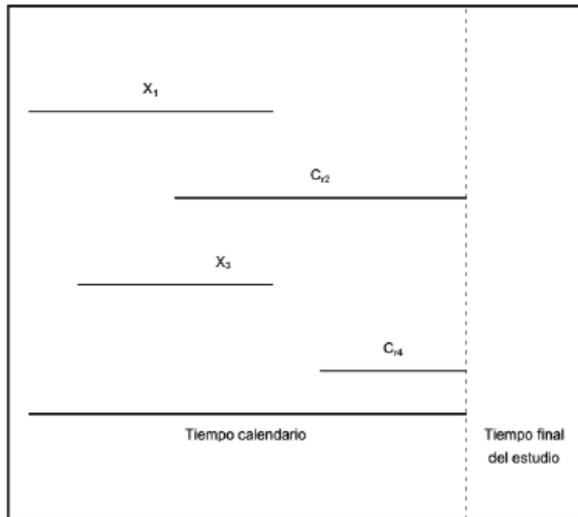
sería el indicador censura, que valdrá 1 si el dato es observado y 0 si el dato es censurado. La contribución del par de variables (Z_i, Δ_i) a la función de verosimilitud:

$$f(Z_i)^{\Delta_i} R(Z_i)^{1-\Delta_i}$$

donde los datos observados contribuyen en la expresión anterior con su función de densidad y los datos censurados con su función de fiabilidad. Por lo tanto, la función de verosimilitud en el caso de censura tipo I sería:

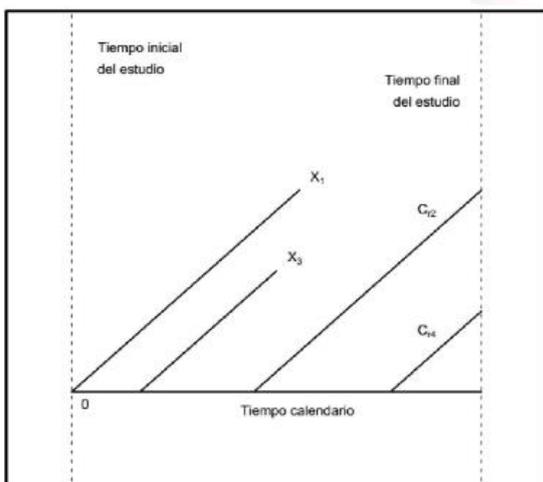
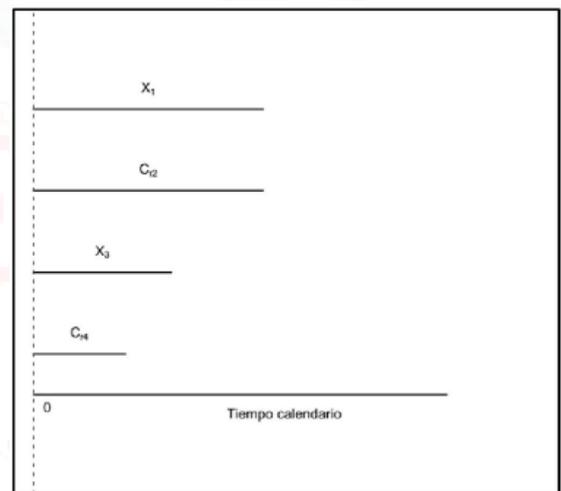
$$\prod_{i=1}^n f(T_i)^{\Delta_i} R(C_i)^{1-\Delta_i} = \prod_{i=1}^n f(Z_i)^{\Delta_i} R(Z_i)^{1-\Delta_i}$$

Cuando las unidades de estudio tienen diferentes tiempos de censura, fijados previamente, esta forma de censura es llamada: Censura Tipo I progresiva. Este tipo de censura se puede representar mediante el siguiente ejemplo que presenta dos diferentes tiempos de censura.



Suponga que se tienen 20 unidades en un experimento donde el evento de interés es la muerte. Suponga que se han marcado 10 de color rojo y los restantes 10 de color azul, de manera que se ha determinado a cada grupo de unidades, tiempos de censura de 42 y 104 semanas respectivamente. De modo que las unidades con marca roja que sobrevivan 42 semanas serán sacrificadas, así como las marcadas de color azul que lleguen vivas a las 104 semanas.

Una forma de ampliar la perspectiva de la Censura Tipo I es cuando las unidades entran al estudio a diferentes tiempos, y el punto terminal de estudio predeterminado por el investigador es el mismo para todas. En este caso, el tiempo de censura para cada unidad es conocido en el momento en que entra al estudio, de manera que cada unidad tiene fijo y especificado su propio tiempo de censura. Este tipo de censura ha sido denominado Censura de Tipo I generalizada. Este tipo de censura es ilustrado en la figura para 4 unidades, donde $t_1 = X_1$.- Tiempo de fallo para la primera unidad ($\Delta_1 = 1$). $t_2 = C_{r2}$.- Tiempo censurado por la derecha para la segunda unidad ($\Delta_2 = 0$). $t_3 = X_3$.- Tiempo de fallo para la tercera unidad ($\Delta_3 = 1$). $t_4 = C_{r4}$.- Tiempo censurado por la derecha para la cuarta unidad ($\Delta_4 = 1$).



Una representación conveniente de la Censura de Tipo I generalizada se da al re-escalar la entrada al estudio de cada unidad al tiempo cero como se muestra en la figura.

Otro método de representación es mediante el diagrama de Lexis. Donde el tiempo calendario se encuentra en el eje horizontal, y la longitud del tiempo de vida es representada por una línea de 45°.

El tiempo que una unidad pasa en el estudio es representado por la altura de la proyección de la línea en el eje vertical. Esto es ilustrado en la figura.

5.1.1.1.2 Censura Tipo II

Un segundo tipo de censura por la derecha es la Censura tipo II, en la cual hay dependencia del tamaño de muestra (denotado por n) y los fallos que se observen. Aquí, todas las unidades son puestas en estudio al mismo tiempo y se finaliza cuando r de las n unidades han presentado el evento de interés. Donde r es un número entero positivo determinado previamente por el investigador, tal que $r < n$. La notación conveniente para este tipo de censura se presenta como sigue. Sean t_1, t_2, \dots, t_n los tiempos de fallo de los n unidades y sean $t(1), t(2), \dots, t(n)$ sus respectivas estadísticas de orden.

Entonces el final del estudio queda dado de forma aleatoria por $t(r)$, la r -ésima estadística de orden.

Por tanto, $(n - r)$ observaciones serán censuradas y fijadas al tiempo $t(r)$. En este caso, el tiempo de censura es aleatorio, pues $(n - r)$ observaciones serían censuradas al tiempo dado por el fallo r -ésimo, el cual no se conoce cuando ocurrirá. De modo que esto marca una diferencia importante entre la Censura de Tipo I y la Censura tipo II.

$$Censura = \begin{cases} \text{Tipo I} & C \text{ determinístico} \\ \text{Tipo II} & X \text{ aleatorio} \end{cases}$$

Formalmente, supongamos que tenemos los r tiempos de vida ordenados más pequeños, $t(1) < \dots < t(r)$ de una muestra aleatoria T de orden n . Si t_1, \dots, t_n tienen distribución continua y son independientes e idénticamente distribuidos con función de densidad $f(t)$ y función de fiabilidad $R(t)$, entonces la función de verosimilitud de la muestra ordenada $t(1), \dots, t(r)$ sería:

$$\frac{n!}{(n-r)!} f(t_{(1)}) \dots f(t_{(r)}) [R(t_{(r)})]^{n-r}$$

Una generalización de la Censura tipo II es similar a la generalización en la censura tipo I, con diferentes tiempos de censura. Esta es llamada Censura tipo II progresiva. Aquí, el investigador debe fijar los siguientes elementos antes de comenzar el estudio. K será el número de diferentes tiempos de censura que se realizarían a lo largo del estudio en una muestra de tamaño n . r_1, r_2, \dots, r_k (k números enteros positivos) serán el número de sujetos que deberán presentar el evento de interés para determinar el respectivo tiempo de censura y n_1, n_2, \dots, n_k (k números enteros positivos tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) serán el número de unidades que deben estar fuera del estudio a cada tiempo de censura. Con estos elementos, el estudio sería realizado de la siguiente forma:

Al presentarse los primeros r_1 eventos de interés, también denotados por fallos, $n_1 - r_1$ unidades serán retiradas de los $n - r_1$ unidades sobrevivientes, quedando $n - n_1$ unidades en el estudio. Cuando se presenten las siguientes r_2 fallos, $n_2 - r_2$ unidades serán retiradas de los $(n - n_1) - r_2$ unidades sobrevivientes, quedando $n - (n_1 + n_2)$ unidades en el estudio. Y así sucesivamente hasta que al tener r_k fallos de los $n - (n_1 + n_2 + \dots + n_{(k-1)}) = n_k$ unidades sobrevivientes en el estudio, los $(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{(k-1)}) - r_k = n_k - r_k$ unidades restantes sean eliminadas, dando por terminado el experimento. De este modo, si t_i denota el tiempo del i -ésimo sujeto en presentar el evento de interés (lo cual excluye a las unidades removidas intencionalmente), los K tiempos de censura serán las variable aleatoria T . $t_{r_1}, t_{n_1 + r_2}, t_{n_1 + n_2 + r_3}, \dots, t_{n_1 + n_2 + \dots + n_k - 1 + r_k}$.

La Censura tipo II progresiva puede ser representada mediante el siguiente ejemplo. Suponga que se tienen 100 unidades en un experimento donde el evento de interés es la muerte. Se definen 3 tiempos de fallo distintos. El primer tiempo de fallo se dará cuando mueran 15 unidades, en ese momento, se retirarán del estudio 15 unidades de las 85 vivas, continuando en el estudio 70 unidades.

El segundo tiempo de fallo se dará cuando mueran 20 unidades de las 70 en estudio, en ese momento, se retirarán 10 unidades de las 50 vivas, quedando 40 unidades en estudio. El tercer tiempo de fallo quedara determinado cuando mueran 30 unidades de las 40 en estudio y se sacrificarán en ese momento las 10 unidades supervivientes. De este modo, en el primer tiempo de fallo se obtendrán 15 eventos y 15 censuras, en el segundo tiempo de fallo se obtendrán 20 eventos y 10 censuras, y en el tercer tiempo de fallo se obtendrán 30 eventos y 10 censuras.

5.1.1.1.3 Censura Tipo III o Aleatoria

Otro tipo de censura es la Censura tipo III o también llamada Censura aleatoria, la cual surge cuando las unidades salen del estudio sin presentar el fallo por razones no controladas por el investigador. Por ejemplo, en un estudio donde el evento de interés es la muerte por alguna razón específica, una unidad puede presentar Censura aleatoria si fallece por alguna razón ajena a la de interés, o si el investigador pierde acceso a ella y esta sale del estudio.

Este tipo de procesos son aquellos en los que se supone que cada individuo tiene asociado un tiempo de vida t_i y un tiempo de censura C , donde t_i y C son variables aleatorias continuas con funciones de densidad $f(t)$ y $g(t)$ y funciones de fiabilidad $R(t)$ y $S(t)$, respectivamente. Todos los tiempos de vida así como los tiempos censurados son mutuamente independientes. Este tipo de censura es una generalización de la censura tipo I, ya que en vez de considerar un tiempo prefijado C constante, se tendrá asociado para cada t_i un valor C_i , con $i = 1, \dots, n$. Como pasaba con la censura tipo I, se tendrá que

$$Z_i = \min(t_i, C)$$

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq C \\ 0 & \text{si } t_i > C \end{cases}$$

Los datos de las observaciones sobre n individuos vendrán dados por los pares (Z_i, Δ_i) , $i = 1, \dots, n$. Entonces, la contribución del par (Z_i, Δ_i) a la función de verosimilitud sería

$$[f(Z_i)S(Z_i)]^{\Delta_i} [g(Z_i)R(Z_i)]^{1-\Delta_i}$$

donde un dato censurado contribuye con su función de densidad y la función de fiabilidad del dato no censurado y un dato observado contribuye con su función de densidad y la función de fiabilidad de la censura. En este caso, la función de verosimilitud sería:

$$\prod_{i=1}^n [f(Z_i)S(Z_i)]^{\Delta_i} [g(Z_i)R(Z_i)]^{1-\Delta_i}$$

5.1.1.2 Censura por la Izquierda

Un tiempo de vida X asociado con una unidad específica en el estudio, es considerada censurada por la izquierda, si esta es menor que un tiempo de censura C_i (C_i por el nombre en inglés "left censoring"). Esto es, que el evento de interés le ha ocurrido a la unidad en estudio, antes de que la unidad haya sido observada por el investigador al tiempo C_i . Para estas unidades, se conoce que han presentado el evento en algún tiempo antes de C_i . El dato proveniente de una muestra censurada por la izquierda puede ser representado por la pareja de variables aleatorias (T, ϵ) donde $T = X$ si el tiempo de vida es observado o $T = C_i$ si es censurado y ϵ indica cuando el tiempo de vida exacto es observado ($\epsilon = 1$) o no ($\epsilon = 0$).

Algunas veces, si la censura por la izquierda ocurre en el estudio, la censura por la derecha puede ocurrir también y los tiempos de vida son considerados doblemente censurados. De nuevo, los datos pueden ser representados por una pareja de variables (T, Δ) donde $T = \max[\min(X, C_r), C_i]$ es el tiempo de estudio y Δ_i es una variable indicadora definida como sigue:

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ es el tiempo de ocurrencia del evento} \\ 0 & \text{si } T \text{ es el tiempo censurado por la derecha} \\ -1 & \text{si } T \text{ es el tiempo censurado por la izquierda} \end{cases}$$

5.1.1.3 Censura por Intervalo

Este es un tipo de censura más general que ocurre cuando el tiempo de vida se conoce que ocurre solamente dentro de un intervalo. Este tipo de censura se presenta cuando se tiene un estudio longitudinal donde el seguimiento del estado de las unidades se realiza periódicamente y por tanto, el fallo sólo puede conocerse entre dos periodos de revisión, generando un intervalo de la forma (L_i, R_i) para cada sujeto en el estudio.

5.1.2 Truncamiento

Una segunda característica que puede presentarse en algunos estudios de vida o supervivencia, son los datos truncados.

El truncamiento es definido como una condición que presentan ciertas unidades en el estudio y el investigador no puede considerar su existencia. Cuando los datos presentan truncamiento, solamente a las unidades a las que les ocurre algún evento particular, antes del evento de interés o la censura, son consideradas en el análisis por el investigador.

5.1.2.1 Truncamiento por la Izquierda

Este ocurre cuando las unidades entran al estudio a una edad particular (no necesariamente el origen del evento de interés), y son observadas desde este "tiempo retrasado de entrada", hasta que el evento ocurre o hasta que el evento es censurado.

Si Y es el momento de ocurrencia del evento que trunca a las unidades en estudio, entonces para muestras truncadas por la izquierda, solo las unidades tales que $X > Y$ serán consideradas.

El tipo más común de truncamiento por la izquierda ocurre cuando las unidades entran al estudio a una edad aleatoria y son observadas por este “tiempo retrasado de entrada”, hasta que el evento ocurre o hasta que la unidad es censurada por la derecha. En este caso, todas las unidades que presenten el evento de interés antes del “tiempo retrasado de entrada”, no serán consideradas para el experimento. Note que esto es opuesto a la censura por la izquierda, donde se tiene información parcial de unidades que presentan el evento de interés antes de su edad de entrada al estudio, para truncamiento por la izquierda, estas unidades no serán consideradas para ser incluidas en el estudio.

5.1.2.2 Truncamiento por la Derecha

Este ocurre cuando solo unidades que han presentado el evento son incluidas en la muestra y ninguna unidad que haya presentado aún el evento será considerada. Un ejemplo de muestras que presentan truncamiento por la derecha, son los estudios de mortalidad basados en registros de muerte.

5.2 Estimación no Paramétrica

En ocasiones puede resultar adecuado, o incluso necesario, iniciar el análisis con métodos no paramétricos, pues éstos no requieren de grandes supuestos previos sobre el modelo de las observaciones. Los modelos no paramétricos, son métodos analíticos y gráficos que permiten interpretar los datos obtenidos, sin la distorsión que podría causar la elección de un modelo paramétrico subyacente no demasiado acertado.

En los estudios no paramétricos, no se asume ningún tipo concreto de modelo probabilístico para los tiempos de fallo y las funciones básicas (fiabilidad, riesgo) se estiman directamente de los datos.

En algunos casos, estos métodos no paramétricos serán suficientes para realizar el análisis de los datos. Sin embargo, en otras circunstancias, son un paso intermedio hacia un modelo más estructurado (paramétrico), que permita profundizar más en el análisis de las observaciones.

Se describirán a continuación tres métodos no paramétricos: las Tablas de Vida, el estimador Kaplan-Meier y el método de Nelson Aalen.

5.2.1 Tablas de Vida

Las tablas de vida tienen como objetivo describir y establecer previsiones sobre la mortalidad, fiabilidad o supervivencia de una población de interés, a partir de la consideración de un conjunto de datos procedentes de un estudio, a los cuales se les hace un seguimiento en un período de tiempo determinado, comprobando si se registra en cada uno de las unidades o elementos, la presencia o ausencia de una característica o evento de interés (Aprendizaje de un método, recuperación física de un paciente, mortalidad de un enfermo, fallo de un dispositivo, etc.) en la población. La validez de éste método exige que la distribución del tiempo de fallo de todos los individuos, censurados y no censurados, sea la misma.

Este es uno de los métodos más clásicos y directos para describir la fiabilidad de una muestra a través de la llamada tabla de Supervivencia o Actuarial, la cual no es más que una tabla de frecuencias mejorada y ampliada. A partir de ella, es posible hacer una

primera estimación sobre los comportamientos de las funciones de supervivencia $R(t)$, distribución $F(t)$, densidad $f(t)$, y tasa de fallo $h(t)$.

La distribución de los tiempos de fallo se divide en un determinado número de intervalos que se denotara $(t_{i-1}, t_i]$. Para cada intervalo se registra el número de observaciones o dispositivos que han entrado en buen estado n_i (número que entra en el intervalo), el número de los que han fallado d_i (número de eventos terminales), y el número de observaciones pérdidas o censuradas en r_i (número que sale en el intervalo). Se calcula a partir de ellos el número de expuestos al riesgo, asumiendo que las pérdidas se producen homogéneamente a lo largo del mismo, su número promedio es $n'_i = n_i - 0.5r_i$. La probabilidad de fallo es la proporción $p_i = d_i / n'_i$, y la de supervivencia es $q_i = 1 - p_i$.

Casi todas las tablas de vida presentan una estructura más o menos estándar con la descripción detallada de las siguientes columnas:

- $(t_{i-1}, t_i]$: identifica los extremos del intervalo de tiempo i -ésimo. El extremo inferior del primer intervalo, t_0 , suele ser 0; si el ensayo no termina hasta que se observe el fallo de todos los individuos, el extremo superior del último intervalo es $t_{s-1} = \infty$.
- t_i : punto medio del intervalo i -ésimo.
- l_i : número de individuos que abandonan el experimento y cuyo tiempo de censura, pertenece al intervalo i -ésimo.
- c_i : número de individuos cuya respuesta o fallo no se ha observado al finalizar el instante final t_i del intervalo i -ésimo.

El tratamiento en el proceso de estimación de ambos tipos de observaciones censuradas, l_i y c_i es idéntico; por ello, en la mayoría de las tablas no se hace la distinción anterior y se define una única columna r_i ,

- r_i : número de censuras en el intervalo i -ésimo. Desde luego, $r_i = l_i + c_i$
- d_i : número de fallos en el intervalo $(t_{i-1}, t_i]$
- n_i : número de individuos en riesgo al inicio del intervalo i -ésimo (que permanecen vivos y en el estudio al comienzo de t_{i-1}). La siguiente relación facilita su cálculo:

$$n_i = n_{i-1} - (d_{i-1} + r_{i-1})$$

- n'_i : número estimado de individuos expuestos a riesgo durante el intervalo i -ésimo. Si en el intervalo no hay observaciones censuradas, $n_i = n'_i$, en otro caso, la hipótesis usual es suponer que las observaciones censuradas ocurridas durante el intervalo se distribuyen en el uniformemente. Por ello, en media, los individuos con observación censurada están expuestos a riesgo durante la mitad de la duración del intervalo, de modo que:

$$n'_i = n_i - \frac{1}{2}r_i$$

- p_i : proporción de fallo en el intervalo i -ésimo. Este valor estima la probabilidad de fallo en ese intervalo, condicionada a que el individuo no había fallado al comienzo del mismo. Si en el intervalo no hay observaciones censuradas, el estimador natural

de esta probabilidad es d_i/n_i si las hay, este estimador tiende a subestimar dicha probabilidad, ya que es posible que alguno de los individuos censurados en el intervalo muera antes de finalizar el mismo. Por esta causa, es necesario realizar un tipo de ajuste; la alternativa habitual consiste en sustituir n_i por el número estimado de individuos expuestos a riesgo n'_i :

$$p_i = \frac{d_i}{n'_i}$$

La validez de este ajuste, en cierta medida arbitraria, depende de las características de los procesos de censura y de fallo. Bajo el esquema de censura aleatoria, este estimador sería inconsistente y sesgado. Sin embargo, cuando la proporción de censura no es excesiva y se distribuye de forma homogénea, si los intervalos no son muy amplios y los valores de n_i no son demasiado pequeños, el comportamiento de este estimador es aceptable.

- q_i : proporción de supervivencia en el intervalo i -ésimo. Este valor estima la probabilidad de que un individuo sobreviva al instante t_i , dado que estaba vivo al inicio del intervalo i -ésimo. Se define:

$$q_i = 1 - p_i$$

- $\hat{P}(t_i) = \hat{R}_i$ proporción de supervivencia en el instante t_i del ensayo. Este valor estima $R(t_i) = P(T > t_i)$. Si un individuo sobrevive hasta el inicio del intervalo $(i + 1)$ -ésimo, implica que dado que ha sobrevivido hasta el comienzo del intervalo i -ésimo, no falla durante el intervalo i -ésimo; así:

$$\hat{P}(t_i) = \hat{R}_i = q_i \cdot \hat{P}(t_{i-1})$$

Aplicando reiteradamente esta relación y dado que $\hat{P}(t_0) = 1$, se obtiene

$$\hat{P}(t_i) = \hat{R}_i = q_i \cdot q_{i-1} \cdots q_1$$

Este estimador de la función de supervivencia se llama estimador actuarial. En los instantes que no son extremo de un intervalo, es habitual calcular su valor mediante interpolación lineal entre los valores de los correspondientes extremos.

- $f(t_i)$: tasa o proporción de fallo en el intervalo i -ésimo por unidad de tiempo. Este valor estima la función de densidad de T en el punto medio del intervalo de anchura b_i :

$$f(\bar{t}_i) = \frac{\hat{P}(t_{i-1}) - \hat{P}(t_i)}{b_i}$$

- $h(t_i)$: tasa instantánea condicional de fallo correspondiente al punto medio del intervalo i -ésimo. Con este valor se estima la función de riesgo en t_i :

$$h(\bar{t}_i) = \frac{f(\bar{t}_i)}{\hat{P}(t_i)} = \frac{f(\bar{t}_i)}{\hat{R}_i}$$

La estimación de la función de riesgo también puede expresarse como:

$$h(\bar{t}_i) = \frac{2p_i}{b_i(1+q_i)} = \frac{d_i}{b_i \left(n'_i - \frac{d_i}{2} \right)}$$

5.2.1.1 Precisión de las Estimaciones.

Los valores de q_i , p_i y $\hat{P}(t_j) = \hat{R}_j$ son estimaciones sujetas a la variabilidad inherente al proceso de muestreo, por lo que deben completarse con información relativa a su precisión. Bajo determinadas hipótesis sobre los mecanismos de censura es posible, aunque complicado, deducir estimaciones de sus varianzas. Por esta razón, aunque la metodología de las tablas de vida clínicas es antigua, el estudio teórico de las propiedades estadísticas de sus estimadores es reciente y está aún por completar. En este apartado se presentan algunas de las propiedades y resultados más utilizados. La mayor parte de estos resultados se han obtenido para el caso de muestras completas, pero se suelen generalizar y aplicar también al caso de muestras censuradas.

La estimación más empleada de la varianza de $\hat{P}(t_j) = \hat{R}_j$ sería la propuesta por Greenwood:

$$Var[\hat{R}_j] \approx \hat{R}_j^2 \sum_{t=1}^j \frac{p_t}{q_t n'_t} = \hat{R}_j^2 \sum_{t=1}^j \frac{d_t}{n'_t(n'_t - d_t)}$$

Esta estimación, resultado de una aproximación asintótica es razonable cuando el valor esperado de n_j no es demasiado pequeño y requiere, si la proporción de censura en la muestra es importante, que el número de intervalos considerados no sea muy pequeño. La expresión anterior tiende a subestimar la varianza de $\hat{p}(t_j)$ especialmente en los intervalos de la cola derecha de la distribución donde el valor esperado de n_j suele ser pequeño. No obstante en esos casos su cálculo no es adecuado ya que la distribución de $\hat{p}(t_j)$ suele ser muy sesgada y, en consecuencia, la varianza no es una buena medida de precisión de la estimación.

5.2.2 Estimador de Kaplan-Meier (KM) de la Función de Fiabilidad.

El impulso de las técnicas de estimación no paramétricas con datos censurados es relativamente reciente. Se inicia con los aportes de Kaplan y Meier quienes publican algunos resultados obtenidos en ese momento para observaciones censuradas a la derecha y añaden un estudio de las propiedades básicas de un nuevo estimador, que se conocerá más tarde con el nombre de sus creadores. De los métodos no paramétricos, desarrollados para estimar la función de fiabilidad con datos no agrupados en presencia de censura, el más utilizado es el estimador producto límite de Kaplan-Meier. Dicho método descompone la supervivencia o fiabilidad de una unidad al cabo de t años, en un producto de probabilidades condicionadas, que deben ser previamente estimadas, antes del cálculo del estimador.

La diferencia fundamental entre el método actuarial y el de KM (que también es una función escalonada), radica en que las estimaciones de Kaplan-Meier están basadas en tiempos de fiabilidad individuales, sin agrupar, mientras que en la estimación por tablas de vida los individuos han sido previamente agrupados en intervalos. La ventaja del método de KM respecto a las tablas de vida, es que las estimaciones resultantes por este método

no dependen de cómo se agrupan los datos en los intervalos. De hecho, Kaplan-Meier se podría considerar como un caso particular del método actuarial.

La estimación producto-límite es definido de la siguiente manera:

Se supone que hay observaciones de n unidades o individuos y K ($K \leq n$) distintos tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ en los cuales ocurren fallos. En los n individuos se permite la posibilidad de que haya más de un fallo en t_j , se denotara por d_j el número de fallos en t_j . Adicional a los tiempos de vida t_1, \dots, t_k existen a su vez tiempos de censura $t_j +$, para aquellos individuos en los que el tiempo de vida no es observado. La estimación producto-límite de $R(t)$ para la duración t , es una función escalonada, que se calcula como el producto de uno menos el riesgo existente hasta el período t :

$$\hat{R}(t) = \prod_{j:t_j < t} \frac{n_j - d_j}{n_j}$$

Donde d_j representa el número de fallos ocurridos en el momento t_j y n_j es la población superviviente en el momento t_j o el número de individuos en riesgo en t_j . Si se diese el caso de alguna observación censurada cuyo valor coincidiera con un tiempo de fallo, se hace la hipótesis de que la unidad censurada ocurre inmediatamente después del tiempo de fallo y, en consecuencia, las unidades censuradas en ese instante se contabilizan como unidades en riesgo.

El estimador KM de $R(t)$ da una estimación puntual o un único valor para esta función en cualquier instante t . Por lo tanto, si se desea tener una medida de la precisión de este estimador en diferentes instantes de tiempo o sobre diferentes muestras, es necesario contar con un buen estimador de la varianza del estimador KM, el cual viene dado por la expresión de Greenwood:

$$Var[\hat{R}(t)] = \hat{R}(t)^2 \cdot \sum_{j:t_j < t} \frac{d_t}{n_j(n_j - d_t)}$$

Utilizando la normalidad asintótica de $\hat{R}(t)$, se puede construir el siguiente intervalo de confianza aproximado para $\hat{R}(t)$, a un nivel del $100(1-\alpha)\%$:

$$\hat{R}(t) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot ee(\hat{R}(t))$$

Donde $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil correspondiente a la distribución normal estándar y ee es el error estándar de estimación del estimador KM de $R(t)$, que se calcula con la anterior fórmula de Greenwood.

5.2.3 Estimador de Kaplan-Meier Ponderado (KMP)

El problema que se presenta con el estimador de Kaplan-Meier (KM) cuando la base de datos del estudio contiene una fuerte censura o alto porcentaje de observaciones con censura, es que sus estimaciones por lo regular, no sólo tienen la tendencia a sobrestimar la fiabilidad o supervivencia de las unidades o individuos en estudio con un alto margen de sesgo, sino que van acompañadas de muy poca variabilidad de las estimaciones. Las estimaciones de KM obtenidas en realidad son estimaciones sesgadas (sobrestimaciones),

porque el método parte del supuesto de que los dispositivos con censura, se conservan vivos (sin averías) hasta el siguiente fallo (incluso después de largos períodos de tiempo). Nada más lejos de la realidad, pues esto es como suponer que el paso del tiempo de un año al siguiente no tiene ningún efecto, ni acción sobre las observaciones (personas en el caso de estudios y tratamiento de enfermedades), razón por la cual, cobra importancia la necesidad de reducir el sesgo que producen las estimaciones de KM con datos censurados.

Para corregir en principio esta aparente debilidad, se propone una modificación al método original de estimación de KM y que consiste en ponderar o acompañarle a las observaciones con censura, un factor o tasa de no censura, propuesta por Bahrawar et al. (2005), quienes aplicaron esta metodología con "datos de Trasplante de Corazón en Stanford", donde la variable respuesta era el tiempo de supervivencia del paciente después del trasplante. La tasa de censura de la base de datos de Stanford era del 27%.

El método de KMp propuesto, responde a esta situación y considera la censura como una parte importante del análisis, que se involucra directamente en la fórmula de su factor de ponderación w_j , conocido como tasa de no censura y que está definido por:

$$w_j = \frac{n_j - c_j}{n_j} \text{ con } 0 \leq w_j \leq 1$$

De modo que si $w_j = 1$, no hay censura en el instante t_j (pues $C_j = 0$), pero si $w_j < 1$, en el instante t_j hay al menos una censura.

El estimador KMp, se define entonces como:

$$\hat{R}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \prod_{j: t_j \leq t} \frac{n_j - d_j}{n_j} & \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

En este caso las estimaciones $KMp=R(t)$ estarían definidas para todo $t \geq 0$, alcanzando el valor 0, aún en el caso de que la última estimación sea censurada, se sugiere considerar la última observación censurada como un fallo, para garantizar su definición en todo instante. Si no hay censura, $R(t)$ coincide con la función empírica de supervivencia FES, ya que $w_j = 1$ y $R(t)$ coincidiría con KM, que a su vez se convierte en la FES, si todos los datos son completos.

5.2.4 Función empírica de Fiabilidad (FES)

Si se tienen n tiempos de fallo ordenados, $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, donde no hay censura, el número de unidades que sobreviven el instante t_j es $n - i$.

Por lo tanto, una plausible estimación no paramétrica de la función de fiabilidad $R(t)$ en t_j , sería simplemente la proporción de unidades que sobreviven en el instante t_j :

$$\hat{R}(t) = \frac{n - i}{n} \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

En consecuencia habría una probabilidad cero de sobrevivir más allá de t_n . Como es improbable que ningún valor muestral alcance el tiempo hasta el fallo más alto, esta

expresión tiende a subestimar la fiabilidad de la componente. En una muestra de datos sin censura, el estimador KM coincide con este estimador, usualmente conocido como función empírica de supervivencia o fiabilidad (FES)

5.2.5 Comparación de Funciones de Fiabilidad

Cuando se desea comparar la supervivencia de dos o más grupos de individuos puede utilizarse un test estadístico global, que responda a la pregunta: ¿Todos los grupos presentan la misma supervivencia?

Si el p-valor asociado a ese test es pequeño, lo que nos permite suponer que no todos los grupos son iguales, hay que plantearse una nueva pregunta: ¿Qué grupos son distintos?

Para responder a esa pregunta debemos realizar todas las comparaciones dos a dos, con un test estadístico apropiado, de modo que se pueda inferir, si las diferencias observadas por cada dos curvas de supervivencia pueden ser explicadas o no por el azar. Una amplia variedad de contrastes no paramétricos, para comparar la igualdad de dos o más funciones de fiabilidad con datos censurados. Los más utilizados son:

El test de Log Rank, (también llamado test de riesgos proporcionales) es muy potente para detectar diferencias cuando los logaritmos de las curvas de supervivencia son proporcionales (lo que es equivalente a decir que los riesgos son proporcionales). Sin embargo, si las curvas de supervivencia se cortan o se cruzan, el test Log Rank tiene problemas para detectar diferencias. En esos casos es más útil el test de Breslow, (también llamado test de Gehan o test de Wilcoxon generalizado), que hace énfasis, de forma especial, en detectar diferencias cuando las curvas se cruzan al principio; por lo cual, este test no resulta adecuado para detectar diferencias a largo plazo. Un test intermedio entre los dos anteriores es el test de Tarone-Ware.

La mayor parte de estos contrastes, son aproximaciones con grandes muestras a la distribución chi-cuadrado, con el supuesto de que la censura y el tiempo de fallo son variables aleatorias independientes.

En relación al estudio de la potencia de estos contrastes, en distintas situaciones (con pequeñas muestras, cuando el fallo ocurre pocas veces, etc.).

Cuando se introduce otra variable que define estratos, las comparaciones que se estudian son las que se basen en los factores o grupos definidos por los estratos existentes. Es el caso que se presenta, por ejemplo, cuando se compara el efecto de dos métodos de fabricación sobre tres líneas de producción.

Los anteriores contrastes sirven para comparar las hipótesis de la forma:

$$H_0 : R_1(t) = R_2(t) = \dots = R_r(t)$$

Frente a la alternativa

$$H_1 : R_1(t) \neq R_r(t)$$

para todo $t > 0$ y para al menos un par de poblaciones I, I' diferentes

Si $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ son k tiempos de la muestra formada por la unión de los individuos de las r muestras. Si además suponemos que, en la muestra j ($j = 1, \dots, r$), ocurren d_{ij} fallos en t_i ($i = 1, \dots, k$) y que n_{ij} están en riesgo en el momento anterior a t_i .

Entonces, se definen $d_i = \sum_{j=1}^r d_{ij}$ y $n_i = \sum_{j=1}^r n_{ij}$ como el total de fallos y el total de unidades en riesgo respectivamente en las r poblaciones en el instante t_i ($i = 1, \dots, k$). De modo que, para la j -ésima población el estadístico $z_j(t)$ queda bien definido por la suma ponderada:

$$z_j(t) = \sum_{i=1}^k w(t) \left\{ d_{ij} - n_{ij} \left(\frac{d_i}{n_i} \right) \right\} \quad j = 1, \dots, r$$

Que corresponde a las diferencias entre el número observado de sucesos y su número esperado, bajo la hipótesis nula en la muestra j -ésima; donde la función peso $w(t_i)$ que aparece en $z_j(t)$ es compartida por todos los r grupos y es la que regula la potencia de los distintos contrastes anteriormente mencionados (Log Rank, Breslow, etc.)

Las $z_j(t)$, así definidas son la base del estadístico de contraste de las hipótesis anteriormente referenciadas y que viene dado por la forma cuadrática:

$$\chi^2 = [z_1(t), \dots, z_{i-1}(t)] \Sigma^{-1} [z_1(t), \dots, z_{i-1}(t)]'$$

Donde Σ^{-1} es la matriz inversa de varianzas-covarianzas de las componentes seleccionadas. Si la hipótesis nula es cierta, este estadístico debe seguir una distribución ji-cuadrado con $r - 1$ grados de libertad.

5.3 Estimación Paramétrica

Otra filosofía de estimación sería la estimación paramétrica que se caracteriza en suponer que la función puede modelarse por una distribución concreta, que depende de un número finito de parámetros que será necesario estimar a partir de muestras de datos reales o simulados. Debido a que los valores observados en este tipo de problemas (tiempos de fallo, niveles de degradación, resistencia de materiales, número de eventos (fallos) en un periodo etc.) son positivos, la modelización usualmente supone una distribución conocida. Así, es común el empleo de distribuciones de probabilidad como la exponencial, lognormal, Weibull, de valores extremos, Gamma, o Poisson (ésta última para el número de fallos). Existen también modelos paramétricos específicos, como la relación de Arrhenius, que permiten modelar procesos donde la duración de un material depende de la temperatura, que son usados en problemas de pruebas aceleradas.

La estimación paramétrica se inicia con la realización del método gráfico donde se identificara gráficamente un modelo teórico, procediendo a continuación con la estimación analítica puntual de los parámetros de la distribución elegida. El método consiste en estimar, por métodos robustos (máxima verosimilitud, momentos, mínimos cuadrados, etc.), los parámetros característicos de la distribución, y usar su normalidad asintótica para realizar la estimación por intervalos y los contrastes de hipótesis del caso

5.3.1 Estimación Gráfica

El primer método y el más sencillo se designa frecuentemente como el método gráfico, la identificación gráfica de los datos tienen por objetivo estudiar si los datos siguen un determinado modelo o no. Las técnicas de estadística descriptiva que se emplean habitualmente en la mayor parte de las áreas: Histogramas, diagramas de tallos y hojas,

Box-plots, etc., no se pueden utilizar en fiabilidad debido al problema de la censura. Por ello es preciso utilizar una serie de técnicas específicas que se basan en la estimación de la función de distribución. Si los datos son completos, la función de distribución de probabilidad se estima de forma inmediata. Si son censurados, se usaran los gráficos de riesgo como la alternativa a los gráficos de probabilidad cuando los datos están censurados.

5.3.1.1 Estimación con Datos no Censurados

Los gráficos de probabilidad constituyen un método gráfico para tratar de buscar una distribución teórica (exponencial, Weibull, Gamma, etc.) que se ajuste bien a las observaciones no censuradas. Lo que se pretende con un gráfico de probabilidad es comparar una función de distribución teórica (f.d. teórica) con la función de distribución empírica (f.d. empírica) que se obtiene a partir de las observaciones no censuradas.

Un gráfico de probabilidad muestra dos gráficos superpuestos:

- El de la función de distribución $F(t)$ asociada a una determinada distribución teórica (f.d. teórica)
- El de una nube de puntos superpuesta a la f.d. teórica. Los puntos de esta nube representan estimaciones puntuales (y no paramétricas) de la función de distribución asociada a las observaciones de los tiempos de fallo T (f.d. empírica)

A los gráficos que comparan diferencias entre la distribución de probabilidad de una población de la que se ha extraído una muestra aleatoria y una distribución teórica o cuando se comparan la distribución de dos conjuntos de datos se les denomina gráficos Q-Q ("Q" viene de cuantil) o gráfico Cuantil-Cuantil.

A fin de facilitar la comparación visual entre ambas funciones de distribución (teórica y empírica), se suelen emplear transformaciones de las variables t y $F(t)$ de forma que la f.d. teórica esté "linealizada" (i.e., la representación gráfica de la misma sea una recta).

Evidentemente, cuanto más se aproxime la nube de puntos (f.d. empírica) a la recta (f.d. teórica), tanto mejor será el ajuste. El gráfico de probabilidad permite pues descartar visualmente aquellas distribuciones teóricas que, claramente, no ajustan bien a los datos, así como seleccionar otras distribuciones que, al menos en apariencia, puedan proporcionar buenos ajustes.

En todo caso, siempre será necesario validar la bondad del ajuste utilizando alguna técnica más objetiva que la simple inspección visual como, por ejemplo, los contrastes de hipótesis sobre la bondad del ajuste.

Por tanto, la Identificación gráfica de los datos se realizara de la manera siguiente:

- Ordenar en forma ascendente los rangos de tiempos de fallos T .
- Elección del modelo teórico y linealización de una distribución (esto implica utilizar uno u otro tipo de papel probabilístico)

- Representación de los datos en el papel de probabilidad del modelo teórico hasta que formen una línea recta, en caso contrario, volver al punto 2 y utilizar otra distribución.
- Estimación de los parámetros del modelo a partir del gráfico

5.3.1.1.1 Linealización de una Distribución.

El proceso de linealización de la f.d. asociada a una distribución consiste en encontrar las transformaciones g_1 y g_2 adecuadas para las variables t y $F(t)$ de modo que al representar $y = g_2(F(t))$ vs. $x = g_1(t)$ se obtenga una recta.

Linealización de la f.d. Asociada a una Distribución Exponencial

La f.d. asociada a una distribución exponencial viene dada por la expresión siguiente

$$F(t) = 1 - \exp \{-t/\eta\}$$

donde $\eta > 0$ (escala) es el parámetro que define la distribución. Esta función puede ser linealizada (i.e., puesta de la forma: $y = a + bx$) como sigue:

$$F(t) = 1 - \exp \{-t/\eta\} \Leftrightarrow \ln(1 - F(t)) = \ln(\exp \{-t/\eta\}) \Leftrightarrow \ln(1 - F(t)) = -(t/\eta) \Leftrightarrow -\ln(1 - F(t)) = t/\eta$$

Haciendo el doble cambio de variable se tendrían las transformaciones a emplear para lograr su linealización:

$$y = -\ln(1 - F(t)) \quad y \quad x = t$$

Es posible expresar la f.d. anterior como:

$$y = (1/\eta) x$$

y donde el parámetro de la distribución exponencial es igual a la pendiente de la recta:

$$\frac{1}{\eta} = \text{tanga} = \frac{x}{y}$$

Linealización de la f.d. Asociada a una Distribución Weibull

La f.d. asociada a una distribución Weibull de dos parámetros (β, η) viene dada por la expresión:

$$F(t) = 1 - \exp\{-(t/\eta)^\beta\}$$

donde $\beta > 0$ (forma) y $\eta > 0$ (escala) son los dos parámetros que definen la distribución. Esta función puede ser linealizada (i.e., puesta de la forma: $y = a + bx$) como sigue:

$$F(t) = 1 - \exp\{-(t/\eta)^\beta\} \Rightarrow \ln(1-F(t)) = \ln(\exp\{-(t/\eta)^\beta\}) \Rightarrow \ln(1-F(t)) = -(t/\eta)^\beta \Rightarrow \ln(-\ln(1-F(t))) = \beta \cdot \ln(t/\eta) \Rightarrow \ln(\ln(1-F(t))-1) = \beta \cdot \ln(t) - \beta \cdot \ln(\eta)$$

Haciendo el doble cambio de variable, se tendrían las transformaciones a emplear para lograr su linealización:

$$y = \ln(\ln(1-F(t))-1) \quad x = \ln(t)$$

Se puede por tanto expresar la ecuación anterior como $y = \beta \cdot x - \beta \cdot \ln(\eta)$. Por tanto, se concluye que $\ln \ln[1/(1-F(t))]$ es una función lineal de $\ln(t)$, el parámetro de forma, β , es la pendiente de la recta y el parámetro de escala η , está en función de la intersección de la recta para $t = 0$ y del parámetro de forma β , por lo tanto:

$$\beta = \text{tanga} = \frac{x}{y}$$

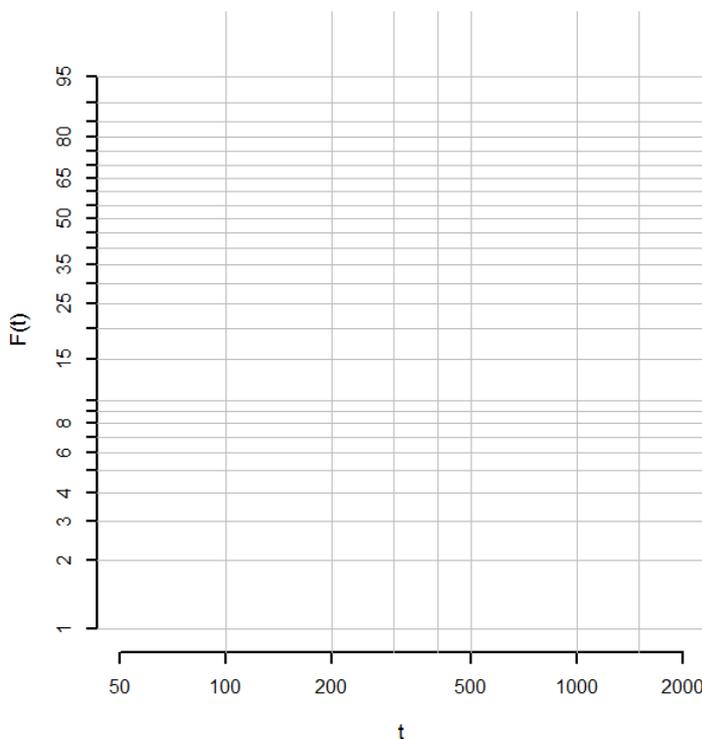
El gráfico probabilístico de Weibull se basa en esta relación lineal y una manera fácil de comprobar si unos datos se ajustan al modelo de Weibull es hacer el gráfico $\ln \ln[1/(1 - F(t))]$ versus $\ln(t)$, donde t son los datos ordenados y $R(t) = 1 - F(t)$ es la función de fiabilidad empírica, y evalúa hasta qué punto la relación lineal es factible.

5.3.1.2 Construcción de Plantillas Especiales para Gráficos de Probabilidad

La construcción del papel probabilístico o las plantillas de gráfico de probabilidad asociadas a una distribución determinada se realizan cuando son conocidas las transformaciones g_1 y g_2 que linealizan una determinada f.d. teórica asociada a una distribución, ya que es posible utilizar sus inversas para obtener t y $F(t)$ en función de x e y respectivamente, i.e.: $t = g_1(x)$ y $F(t) = g_2(y)$

Con ello, resulta inmediato volver a "etiquetar" los ejes x e y a fin de que muestren los correspondientes valores de t y $F(t)$. Ello permitirá representar, sobre estos "ejes transformados", directamente los valores t y $F(t)$.

Gráfico de Weibull



Plantilla especial para gráfico de probabilidad de Weibull

En el caso de una distribución Weibull biparamétrica (β, η) , se vio que las transformaciones a aplicar serían:

$$y = \ln(\ln(1-F(t)) - 1) \quad y \quad x = \ln(t)$$

Deshaciendo dichas transformaciones se obtiene que:

$$F(t) = 1 - (\exp \{\exp \{y\}\})^{-1} \quad y \quad t = \exp \{x\}$$

Por tanto, bastaría con utilizar dichas “transformaciones inversas” para volver a etiquetar los ejes indicados anteriormente. El resultado sería una plantilla como la indicada en la figura, sobre la cual se representará directamente (sin transformaciones adicionales) $F(t)$ vs. t :

5.3.1.3 Estimación de la f.d. Empírica.

Una vez seleccionada la distribución teórica que se usará para tratar de ajustar las observaciones, se procederá a representar la nube de puntos sobre la correspondiente plantilla de gráfico de probabilidad. Cada uno de los puntos $(t_i, \hat{F}(t_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$, representará a cada uno de los n tiempos de fallo observados, t_i (eje x), junto con el correspondiente valor estimado de la f.d. experimental, $\hat{F}(t_i)$ (eje y). El diagrama de probabilidad permitirá apreciar visualmente si la nube de puntos sigue un patrón aproximadamente lineal (lo cual favorecería la hipótesis de que la distribución teórica seleccionada se ajusta bien a las observaciones) o, por el contrario, si ésta sigue un patrón muy distinto del lineal (lo cual permitiría descartar la distribución teórica seleccionada a efectos de explicar el comportamiento de las observaciones).